C. R. Acad. Sci. Paris, t. 321, Série I, p. 557-562, 1995

Équations aux dérivées partielles/*Partial Differential Equations*

Analyse asymptotique spectrale de l'équation des ondes. Complétude du spectre de Bloch

Grégoire ALLAIRE et Carlos CONCA

Résumé – Dans une première Note [1], nous avons commencé l'étude du comportement asymptotique du spectre de l'équation des ondes dans un milieu hétérogène périodique borné Ω, lorsque sa période tend vers zéro. Au moyen d'une technique d'homogénéisation par ondes de Bloch, nous avons caractérisé une partie du spectre limite que l'on appelle *spectre de Bloch*. Dans cette deuxième Note, nous étudions la « complétude » de notre précédente analyse, c'est-à-dire la différence entre le spectre limite et le spectre de Bloch. Nous démontrons qu'ils diffèrent seulement par un *spectre de couche limite* qui est constitué des valeurs propres limites correspondant à des suites de vecteurs propres qui se concentrent sur le bord du domaine Ω. Dans le cas où Ω est sans bord (par exemple, un cube avec des conditions aux limites de périodicité), le spectre limite coïncide exactement avec le spectre de Bloch. Pour démontrer ce résultat nous introduisons une notion de *mesures de Bloch* qui peut s'interpréter comme une version *ad hoc* des mesures de Wigner de l'analyse semi-classique.

Asymptotic analysis of the wave equation spectrum. Completeness of the Bloch spectrum

Abstract – *In a previous Note* [1] *we began to study the asymptotic behaviour of the spectrum of the wave equation in a bounded periodic heterogeneous medium* Ω *when its period goes to zero. By means of a Bloch wave homogenization method, part of the limit spectrum was characterized as the* Bloch spectrum. *In this second Note, we investigate the "completness" of our previous analysis,* i.e. *the discrepancy between the complete limit spectrum and the Bloch spectrum. We prove that they differ only by a so-called* boundary layer spectrum *which is made of limit eigenvalues corresponding to sequences of eigenvectors which concentrate on the boundary of the domain* Ω. *In the case of a domain without boundary (for example, a cube with periodic boundary conditions), the limit spectrum does indeed coincide with the Bloch spectrum. The proof relies on a notion of* Bloch measures *which can be seen as* ad hoc *Wigner measures in the context of semi-classical analysis.*

Abridged English Version – We consider the following spectral problem for the wave equation in a bounded domain Ω occupied by a periodic heterogeneous medium

$$-\varepsilon^2 \operatorname{div}\left[A\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \operatorname{grad} v_\varepsilon\right] + v_\varepsilon = \frac{1}{\mu_\varepsilon} v_\varepsilon \quad \text{in } \Omega, \qquad v_\varepsilon = 0 \quad \text{on } \partial\Omega,$$

where $A(x, y)$ is a smooth, coercive, symmetric, matrix which is periodic in y running in the unit cube $Y = [0, 1]^N$. We denote by $\tilde{\sigma}_\varepsilon$ the set of eigenvalues μ_ε. It is a discrete spectrum made of a countable sequence of eigenvalues converging to 0. In a first Note [1], we studied the limit set $\tilde{\sigma}_\infty$ of $\tilde{\sigma}_\varepsilon$ as the period ε goes to 0. For each value of $(x, \theta) \in \bar{\Omega} \times Y$, a limit problem in the unit cube Y [*see* (2) below] is introduced which admits a discrete spectrum $\{\mu^k(x, \theta)\}_{k \geq 1}$ where each eigenvalue μ^k (labeled in decreasing order) is a continuous function of (x, θ). Defining the Bloch spectrum $\tilde{\sigma}_{\text{Bloch}}$ by (3), our main result in [1] was to prove that $\tilde{\sigma}_{\text{Bloch}} \subset \tilde{\sigma}_\infty = \lim_{\varepsilon \to 0} \tilde{\sigma}_\varepsilon$. We now address the question of the *completeness* of the Bloch spectrum, *i.e.* the possible equality between $\tilde{\sigma}_{\text{Bloch}}$ and $\tilde{\sigma}_\infty$.

Taking any sequence $(\mu_\varepsilon, v_\varepsilon)$ of eigenvalues and eigenvectors such that $\|v_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} = 1$ and μ_ε converges to μ, we first establish in lemma 2 below the following alternative: either the sequence v_ε can be truncated to have compact support in Ω and to become a sequence of quasi eigenvectors in the sense of definition 1, either v_ε concentrates on the boundary $\partial\Omega$ as indicated by (6). We define the so-called *boundary layer spectrum* $\tilde{\sigma}_{\text{boundary}}$ which is made of

Note présentée par Jacques-Louis LIONS.

0764-4442/95/03210557 $ 2.00

these limit eigenvalues μ corresponding to sequences of eigenvectors obeying the second part of the alternative (*see* definition 3). Our main result is

THEOREM. – *The limit spectrum is given by* $\tilde{\sigma}_\infty = \tilde{\sigma}_{\text{Bloch}} \cup \tilde{\sigma}_{\text{boundary}}$.

Of course, if the domain Ω has no boundaries (for example, it is a cube with periodic boundary condition), and if the sequence of periods ε is selected in such a way that Ω is made only of entire periodicity cells, then $\tilde{\sigma}_{\text{boundary}}$ is empty.

Let us briefly indicate the key ideas of the proof of this theorem. By virtue of definition 1, the sequence of quasi eigenvectors has compact support in Ω, and thus satisfies periodic boundary conditions in a larger cube. It is thus amenable to the Bloch wave decomposition. Furthermore, each Bloch component is decomposed on the basis of eigenfunctions of the limit problem (2) for the same Bloch frequency. We then multiply the spectral equation by a modulation of this double decomposition [*see* (7)]. Finally, introducing *Bloch measures* which quantify the amount of oscillations of each component of such a decomposed sequence, we can pass to the limit in the spectral equation which yields that the limit eigenvalue μ must coincide at least with one eigenvalue $\mu^k(x, \theta)$ of the limit problems.

This approach has already been applied to a different spectral problem in [2] where the interested reader can find detailed proofs.

---

1. INTRODUCTION. – Étant donné Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, occupé par un milieu hétérogène périodique de période $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, on s'intéresse au problème spectral suivant : trouver les couples $(\mu_\varepsilon, v_\varepsilon) \in \mathbb{R}^+ \times H_0^1(\Omega)$, $v_\varepsilon \not\equiv 0$, tels que

$$(1) \qquad -\varepsilon^2 \operatorname{div}\left[A\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \operatorname{grad} v_\varepsilon\right] + v_\varepsilon = \frac{1}{\mu_\varepsilon} v_\varepsilon \quad \text{dans } \Omega, \qquad v_\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega,$$

où la matrice $A(x, y)$ est symétrique, coercive, périodique en y, et appartient à $\mathcal{C}(\bar{\Omega}; L^\infty_\#(Y))$ (Y désigne le cube unité $[0, 1]^N$ et l'indice $\#$ indique qu'il s'agit d'un espace de fonctions périodiques). On note $\tilde{\sigma}_\varepsilon$ le spectre de (1), c'est-à-dire la fermeture de l'ensemble des valeurs propres μ_ε solutions de (1). On sait qu'il existe une suite dénombrable de valeurs propres, qui tend vers 0, telle que $\tilde{\sigma}_\varepsilon = \{0\} \cup \bigcup_{k \geqq 1} \{\mu_\varepsilon^k\}$.

Dans une première Note [1] nous avons étudié la convergence de ce spectre $\tilde{\sigma}_\varepsilon$ à l'aide d'une méthode, dite d'homogénéisation par ondes de Boch. On introduit une famille de problèmes limites : pour chaque $(x, \theta) \in \bar{\Omega} \times Y$, trouver $(\mu(x, \theta), v(y)) \in \mathbb{R}^+ \times H^1_\#(Y)$, $\|v\|_{L^2(Y)} = 1$, tels que

$$(2) \qquad \begin{aligned} &-\operatorname{div}_y [A(x, y) \operatorname{grad}_y (v(y) e^{2\pi i\theta \cdot y})] + v(y) e^{2\pi i\theta \cdot y} \\ &= \frac{1}{\mu(x, \theta)} v(y) e^{2\pi i\theta \cdot y} \quad \text{dans } Y. \end{aligned}$$

On note $\tilde{\sigma}(x, \theta) = \{0\} \cup \bigcup_{k \geqq 1} \{\mu^k(x, \theta)\}$ le spectre de (2) qui est aussi constitué de l'adhérence d'une suite dénombrable de valeurs propres qui tend vers 0. Or, pour k fixé, la valeur propre $\mu^k(x, \theta)$ est une fonction continue de (x, θ). On définit alors le spectre de Bloch $\tilde{\sigma}_{\text{Bloch}}$ comme la réunion de tous les spectres $\tilde{\sigma}(x, \theta)$, autrement dit

$$(3) \qquad \tilde{\sigma}_{\text{Bloch}} = \{0\} \cup \bigcup_{k \geqq 1} [\min_{(x, \theta) \in \bar{\Omega} \times Y} \mu^k(x, \theta), \max_{(x, \theta) \in \bar{\Omega} \times Y} \mu^k(x, \theta)].$$

Le résultat principal de notre précédente Note (théorème 1 de [1]), montre que le spectre de Bloch $\tilde{\sigma}_{\text{Bloch}}$ est inclus dans l'ensemble limite $\tilde{\sigma}_\infty = \{\mu \in \mathbb{R}^+ | \exists\, \mu_\varepsilon \in \tilde{\sigma}_\varepsilon$ tel que $\mu_\varepsilon \to \mu\}$. Le but de cette Note est de démontrer un résultat de *complétude* du spectre de Bloch, c'est-à-dire de trouver sous quelles conditions $\tilde{\sigma}_{\text{Bloch}}$ est égal à $\tilde{\sigma}_\infty$.

2. Principaux résultats. – On se donne une suite quelconque de valeurs et vecteurs propres $(\mu_\varepsilon, v_\varepsilon)$ solutions de (1) telle que

$$\|v_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \mu_\varepsilon = \mu, \tag{4}$$

et on se propose de caractériser l'ensemble des limites possibles μ.

Définition 1. – On dit qu'une suite u_ε est une suite de quasi vecteurs propres associée à la suite de valeurs propres μ_ε de (1) si elle satisfait les conditions suivantes

$$\begin{cases} u_\varepsilon \text{ a un support compact dans } \Omega, \quad \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} = 1, \quad \varepsilon \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)^N} \leqq C, \\ -\varepsilon^2 \operatorname{div}\left[A\left(x, \dfrac{x}{\varepsilon}\right) \operatorname{grad} u_\varepsilon\right] + u_\varepsilon = \dfrac{1}{\mu_\varepsilon} u_\varepsilon + r_\varepsilon \quad \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{5}$$

où r_ε est un reste négligeable qui vérifie $\lim_{\varepsilon \to 0} \langle r_\varepsilon, w_\varepsilon \rangle_{H^{-1}, H_0^1(\Omega)} = 0$, pour toute suite w_ε telle que $\|w_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} + \varepsilon \|\nabla w_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)^N} \leqq C$.

Nous commençons par donner une alternative pour la suite de vecteurs propres v_ε : soit une partie de son énergie reste à l'intérieur de Ω et il est alors possible de la tronquer pour construire une suite de quasi vecteurs propres, soit la suite tend très vite vers 0 à l'intérieur de Ω et se concentre donc sur le bord de Ω comme une couche limite.

Lemme 2. – *La suite v_ε vérifie l'alternative suivante :*

(i) *soit il existe $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tel que, pour une sous-suite, $u_\varepsilon = \varphi v_\varepsilon / \|\varphi v_\varepsilon\|$ est une suite de quasi vecteurs propres au sens de la définition 1,*

(ii) *soit, pour tout ouvert ω tel que $\bar{\omega} \subset \Omega$ et pour tout entier $n \geqq 0$, il existe une constante $c(\omega, n)$ telle que toute la suite v_ε satisfait l'estimation*

$$\|v_\varepsilon\|_{L^2(\omega)} + \varepsilon \|\nabla v_\varepsilon\|_{L^2(\omega)^N} \leqq c(\omega, n)\, \varepsilon^n. \tag{6}$$

Définition 3. – On appelle spectre de « couche limite », et on note $\tilde{\sigma}_{\text{bord}}$, l'ensemble des valeurs propres limites μ telles que la suite de vecteurs propres v_ε vérifie la condition (ii) du lemme 2, c'est-à-dire

$$\tilde{\sigma}_{\text{bord}} = \{\mu \in \mathbb{R}^+ | \exists\, (\mu_\varepsilon, v_\varepsilon) \text{ solutions de (1) qui vérifient (4) et (6)}\}.$$

Théorème 4. – *Si la suite v_ε satisfait la condition* (i) *du lemme* 1, *alors la valeur propre limite μ appartient au spectre de Bloch. Dans le cas contraire, c'est-à-dire si* (ii) *est satisfaite, alors, en vertu de la définition* 3, *μ appartient au spectre de couche limite. Par conséquent $\tilde{\sigma}_\infty = \tilde{\sigma}_{\text{Bloch}} \cup \tilde{\sigma}_{\text{bord}}$.*

Bien sûr, il est facile de voir que si le domaine Ω n'a pas de bord, par exemple s'il s'agit d'un tore, alors il n'y a pas de spectre de couche limite et $\tilde{\sigma}_{\text{bord}}$ est vide.

Corollaire 5. – *On suppose que le domaine Ω est un cube de taille L et que la condition aux limites de Dirichlet sur $\partial\Omega$ est remplacée par une condition de périodicité. Si de plus $A(x, y)$ est périodique dans les deux variables x et y, alors pour la suite de périodes $\varepsilon_n = L/n$, où n est entier, on a $\tilde{\sigma}_\infty = \tilde{\sigma}_{\text{Bloch}}$.*

En général, nous ne savons pas expliciter le spectre de couche limite $\tilde{\sigma}_{\text{bord}}$. Cependant, si Ω est un parallélépipède qui, pour une sous-suite ε, se divise en un nombre fini de cellules entières, on peut caractériser complètement $\tilde{\sigma}_{\text{bord}}$ à l'aide d'une variante de la méthode d'homogénéisation par ondes de Bloch présentée dans [1]. Dans cette variante, on pose le problème spectral dans des espaces de fonctions de deux variables x et y qui ne sont périodiques en y que dans les directions tangentes à un bord du domaine, et qui décroissent à l'infini dans la direction perpendiculaire à ce bord. On utilise alors une modification de la convergence à deux échelles adaptée à ce type de fonctions oscillantes qui modélisent, en quelque sorte, des couches limites (*voir* [3]).

3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE COMPLÉTUDE. – Dans cette section, on indique les idées principales de la démonstration du théorème 4. Pour simplifier la présentation, on suppose que la matrice de coefficients $A(y)$ ne dépend que de la variable microscopique $y \in Y$. Le cas général d'une matrice $A(x, y)$ est techniquement un peu plus compliqué, mais n'introduit pas de difficultés fondamentales supplémentaires. On se place dans la situation où la suite de valeurs et vecteurs propres $(\mu_\varepsilon, v_\varepsilon)$, introduite dans la section précédente, vérifie la condition (i) du lemme 2. Il existe alors une fonction φ, très régulière et à support compact dans Ω, telle que, pour une sous-suite, $u_\varepsilon = \varphi v_\varepsilon / \|\varphi v_\varepsilon\|$ est une suite de quasi vecteurs propres au sens de la définition 1.

Une première étape consiste à décomposer en ondes de Bloch la suite u_ε, préalablement étendu par 0 en dehors de Ω. Soit $K(\varepsilon)$ le plus petit entier tel que le cube $Q_\varepsilon = \varepsilon K(\varepsilon) Y$ contienne Ω. Chaque fonction u_ε appartient alors à $H^1_\#(Q_\varepsilon)$, et on peut lui appliquer la décomposition en ondes de Bloch discrètes déjà introduite dans notre première Note (lemme 5 dans [1]). Autrement dit, il existe une unique famille $\{u^j_\varepsilon(y)\} \in H^1_\#(Y)^{K(\varepsilon)^N}$, où j est un multi-indice dont chacune des N composantes appartient à $\{0, \ldots, K(\varepsilon)-1\}$, telle que

$$u_\varepsilon(x) = \sum_{0 \leqq j \leqq K(\varepsilon)-1} u^j_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) e^{2\pi i (j \cdot x / \varepsilon K(\varepsilon))}.$$

Puis chaque composante de Bloch $u^j_\varepsilon(y)$ est décomposée sur la base hilbertienne de $L^2_\#(Y)$ des fonctions propres $\{v^k(\theta, y)\}_{k \geqq 1}$ du problème (2), pour la fréquence de Bloch $\theta = j/K(\varepsilon)$. Il existe donc une suite de coefficients $\{\alpha^k_\varepsilon(j/K(\varepsilon))\}_{k \geqq 1}$ telle que

$$u^j_\varepsilon(y) = \sum_{k \geqq 1} \alpha^k_\varepsilon\left(\frac{j}{K(\varepsilon)}\right) v^k\left(\frac{j}{K(\varepsilon)}, y\right).$$

Dans une deuxième étape, on introduit une *modulation* $\mathcal{M}(u_\varepsilon)$ de la suite de quasi vecteurs propres définie par

$$\mathcal{M}(u_\varepsilon)(x) = \sum_{0 \leqq j \leqq K(\varepsilon)-1} \sum_{k \geqq 1} \psi^k\left(\frac{j}{K(\varepsilon)}\right) \alpha^k_\varepsilon\left(\frac{j}{K(\varepsilon)}\right) v^k\left(\frac{j}{K(\varepsilon)}, \frac{x}{\varepsilon}\right) e^{2\pi i (j \cdot x / \varepsilon K(\varepsilon))},$$

où les fonctions $\psi^k(\theta)$ sont continues, périodiques sur Y, et uniformément bornées. Il est facile de voir qu'ainsi définie cette modulation $\mathcal{M}(u_\varepsilon)$ appartient à $H^1_\#(Q_\varepsilon)$ et vérifie le même type d'estimations *a priori* que la suite u_ε. On peut alors multiplier son conjugué à l'équation satisfaite par u_ε, ce qui donne

$$\varepsilon^2 \int_\Omega A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \overline{\mathcal{M}(u_\varepsilon)}\, dx + \left(1 - \frac{1}{\mu_\varepsilon}\right) \int_\Omega u_\varepsilon \overline{\mathcal{M}(u_\varepsilon)}\, dx = \langle r_\varepsilon, \overline{\mathcal{M}(u_\varepsilon)} \rangle_{H^{-1}, H^1_0(\Omega)}, \tag{7}$$

où le membre de droite tend vers 0 en vertu de la définition 1. On utilise alors les propriétés d'orthogonalité des ondes de Bloch et des fonctions propres, ainsi que l'équation spectrale (2), pour transformer l'équation (7) en

$$\text{(8)} \qquad \sum_{0 \leqq j \leqq K(\varepsilon)-1} \sum_{k \geqq 1} \psi^k \left(\frac{j}{K(\varepsilon)} \right) \left| \alpha_\varepsilon^k \left(\frac{j}{K(\varepsilon)} \right) \right|^2 \left(\frac{1}{\mu^k (j/K(\varepsilon))} - \frac{1}{\mu_\varepsilon} \right) = o(1).$$

Dans une troisième étape, on définit la famille $\{ \nu_\varepsilon^k(\theta) \}_{k \geqq 1}$ des *mesures de Bloch*, associée à la suite u_ε, par

$$\nu_\varepsilon^k(\theta) = \sum_{0 \leqq j \leqq K(\varepsilon)-1} \left| \alpha_\varepsilon^k \left(\frac{j}{K(\varepsilon)} \right) \right|^2 \delta_{\theta = j/K(\varepsilon)},$$

où $\delta_{\theta=\theta_0}$ désigne la masse de Dirac au point θ_0. Chaque $\nu_\varepsilon^k(\theta)$ est une mesure de Radon positive, définie sur Y. Comme la norme de u_ε dans $L^2(\Omega)$ est égale à 1, la somme des masses de ces mesures vaut exactement le volume du cube Q_ε qui englobe Ω. Ces mesures étant ainsi bornées, on peut en extraire une sous-suite et il existe une famille de mesures limites $\{ \nu^k(\theta) \}_{k \geqq 1}$ telle que, pour cette sous-suite, chaque ν_ε^k converge vers ν^k au sens des mesures vagues. Les mesures limites sont bien sûr positives, mais elles sont aussi non toutes nulles car la somme de leurs masses se conserve dans le passage à la limite, $\varepsilon \to 0$, à cause de l'estimation sur $\varepsilon \nabla u_\varepsilon$. À l'aide de ces mesures de Bloch, on peut réécrire l'équation (8) sous la forme

$$\text{(9)} \qquad \sum_{k \geqq 1} \int_Y \psi^k(\theta) \left(\frac{1}{\mu^k(\theta)} - \frac{1}{\mu_\varepsilon} \right) \nu_\varepsilon^k(\theta)\, d\theta = o(1).$$

Les fonctions tests ψ^k et les valeurs propres μ^k étant continues en θ, et les mesures ν^k étant non toutes nulles, on peut alors passer à la limite dans (9) et montrer ainsi qu'il existe au moins une valeur de θ et un niveau d'énergie k tel que $\mu = \mu^k(\theta)$.

Remarque 6. – Il est important de noter qu'à l'aide de la technique ci-dessus des « mesures de Bloch » on ne peut démontrer que l'inclusion $\tilde{\sigma}_\infty \subset \tilde{\sigma}_{\text{Bloch}} \cup \tilde{\sigma}_{\text{bord}}$. Pour obtenir l'égalité, il est nécessaire d'utiliser le résultat de la méthode d'homogénéisation par ondes de Bloch, décrite dans notre première Note [1], qui donne l'inclusion inverse. En ce sens, ces deux outils sont complémentaires et non redondants. Rappelons que nous les avons déjà appliqués à un problème spectral légèrement différent dans [2], où on trouvera des démonstrations complètes.

Remarque 7. – Les mesures de Bloch introduites ci-dessus jouent approximativement le rôle des mesures semi-classiques, ou mesures de Wigner, bien connues dans le cadre de l'équation de Schrödinger (*voir*, par exemple, [4], [6], et [7]). Par ailleurs, dans [5] des résultats assez proches ont été obtenus pour l'équation de Schrödinger au moyen de techniques d'analyse microlocale.

Note remise le 2 mai 1995, acceptée le 26 juin 1995.

Références bibliographiques

[1] G. Allaire et C. Conca, Analyse asymptotique spectrale de l'équation des ondes. Homogénéisation par ondes de Boch, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 321, série I, 1995, p. 293-298.

[2] G. Allaire et C. Conca, Bloch wave homogenization for a spectral problem in fluid-solid structures, *Arch. Rational Mech. Anal.*, p. 293-298.

[3] G. Allaire et C. Conca, Boundary layers in the homogenization of a spectral problem in fluid-solid structures (article en préparation).

[4] P. Gérard, Mesures semi-classiques et ondes de Bloch, *Sém. Équations aux Dérivées Partielles*, 1990-1991, 16, École Polytechnique, Palaiseau, 1991.

[5] G. Gérard, A. Martinez et J. Sjöstrand, A mathematical approach to the effective hamiltonian in perturbed periodic problems, *Comm. Math. Phys.*, 142, 1991, p. 217-244.

[6] P.-L. Lions et T. Paul, Sur les mesures de Wigner, *Rev. Math. Iberoamericana*, 9, 1993, p. 553-618.

[7] P. A. Markowich, N. J. Mauser et F. Poupaud, A Wigner function approach to semiclassical limits: electrons in a periodic potential, *J. Math. Phys.*, 35, 1994, p. 1066-1094.

G. A. : Commissariat à l'Énergie Atomique, DRN/DMT/SERMA, CE Saclay, 91191 Gif-sur-Yvette, France et Laboratoire d'Analyse Numérique, Université Paris-VI, 75006 Paris, France;

C. C. : Universidad de Chile, Departamento de Ingeniería Matemática, Casilla 170/3, Correo 3, Santiago, Chile.