Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique

C. R. Acad. Sci. Paris, t. 309, Série I, p. 741-746, 1989

Problèmes mathématiques de la mécanique/*Mathematical Problems in Mechanics*

Homogénéisation des équations de Stokes dans un domaine perforé de petits trous répartis périodiquement

Grégoire ALLAIRE

Résumé — On étudie l'homogénéisation des équations de Stokes avec condition aux limites de Dirichlet dans un ouvert perforé de petits trous répartis périodiquement : par exemple en dimension 3, les trous sont de taille ε^3 répartis aux nœuds d'un réseau régulier de pas 2ε. L'équation homogénéisée est une équation de Brinkman, *i. e.* une équation de Stokes avec en plus un terme linéaire d'ordre 0 pour la vitesse.

Homogenization of Stokes equations in open sets perforated with tiny holes

Abstract — *We study the homogenization of Stokes equations with Dirichlet boundary condition in an open set which is perforated by periodically distributed tiny holes (for example in the 3-D case, the holes have a size of ε^3 and are distributed on a mesh of size* ε*); the homogenized equation is a Brinkman's equation,* i. e. *a Stokes equation plus a zero order linear term for the velocity.*

Abridged English Version — We study the homogenization of Stokes equations with Dirichlet boundary condition in an open set Ω_ε obtained as follows: let Ω be a bounded connected open set with a smooth boundary in $\mathbf{R}^N$. The set Ω is covered with a regular mesh of size 2ε, each cell being a cube $]-\varepsilon; +\varepsilon[^N$ which is perforated at its center by a tiny hole T_i^ε equal to $a_\varepsilon T$ where T is a given closed set which does not depend on ε, and a_ε is the hole's size. We obtain Ω_ε by removing from Ω all the holes T_i^ε which do not cut the boundary $\partial\Omega$.

Let $f \in [L^2(\Omega)]^N$. For each $\varepsilon > 0$ there exists a unique solution of the Stokes problem (S_ε):

$$(S_\varepsilon)\begin{cases} \textit{Find}\ (u_\varepsilon, p_\varepsilon) \in [H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^N \times [L^2(\Omega_\varepsilon)/R]\ \textit{such that:} \\ \nabla p_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon = f \quad \textit{in}\ \Omega_\varepsilon \\ \nabla . u_\varepsilon = 0 \quad \textit{in}\ \Omega_\varepsilon. \end{cases}$$

It is easy to see that $\tilde{u}_\varepsilon$, the extension by 0 in $\Omega - \Omega_\varepsilon$ of the velocity u_ε, remains bounded in $[H_0^1(\Omega)]^N$ when ε goes to 0. In order to pass to the limit in (S_ε) with the energy method (*see* [10]) we make theoretical assumptions (*see* [1]) which lead to the following choice of the a_ε value:

$$a_\varepsilon = C_0\, \varepsilon^{N/(N-2)} \quad \text{for } N \geqq 3, \qquad a_\varepsilon = e^{-C_0/\varepsilon^2} \quad \text{for } N = 2 \quad \textit{with}\ C_0 > 0.$$

Then we prove (*see* [1] for details):

THEOREM. — *There exists an extension operator* P_ε *from* $L^2(\Omega_\varepsilon)$ *in* $L^2(\Omega)$ *such that, for each* $q_\varepsilon \in L^2(\Omega_\varepsilon)$, *we have:*

(i) $P_\varepsilon(q_\varepsilon) = q_\varepsilon$ *in* Ω_ε.

(ii) $\| P_\varepsilon(q_\varepsilon) \|_{L^2(\Omega)} \leqq C \| q_\varepsilon \|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}$ *where* C *does not depend on* ε.

(iii) $\| \nabla [P_\varepsilon(q_\varepsilon)] \|_{H^{-1}(\Omega)} \leqq C \| \nabla q_\varepsilon \|_{H^{-1}(\Omega_\varepsilon)}$ *where* C *does not depend on* ε.

Note présentée par Luc TARTAR.

0249-6291/89/03090741 $ 2.00

THEOREM. — *Let* $(u_\varepsilon, p_\varepsilon)$ *be the solution of* (S_ε). *Then* $(\tilde{u}_\varepsilon, P_\varepsilon(p_\varepsilon))$ *converges weakly to* (u, p) *in* $[H_0^1(\Omega)]^N \times [L^2(\Omega)/R]$ *where* (u, p) *is the unique solution of the Brinkman's law* (B):

$$\text{(B)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \textit{Find } (u, p) \in [H_0^1(\Omega)]^N \times [L^2(\Omega)/R] \textit{ such that:} \\ \nabla p - \Delta u + M u = f \quad \textit{in } \Omega \\ \nabla . u = 0 \quad \textit{in } \Omega \end{array} \right.$$

where M *is a symmetric positive matrix which depends on* T.

Moreover when T is a ball of radius 1, M is explicitely given by:

$$M = \frac{N(N-2)}{N-1} \frac{S_N C_0^{N-2}}{2^N} \mathrm{Id} \qquad \text{for} \quad N \geqq 3$$

where S_N is the surface measure of the unit sphere in R^N

$$M = \frac{\pi}{C_0} \mathrm{Id} \qquad \text{for} \quad N = 2.$$

INTRODUCTION. — On étudie l'homogénéisation des équations de Stokes avec condition aux limites de Dirichlet dans un ouvert Ω_ε obtenu en ôtant d'un ouvert donné Ω des petits trous tous semblables, homothétiques, de rapport $\varepsilon^{N/(N-2)}$ pour $N \geqq 3$ ou $\exp(-1/\varepsilon^2)$ pour $N=2$, à un trou modèle T. Ces trous sont périodiquement répartis avec une période 2ε dans la direction de chacun des axes. Le problème homogénéisé est alors une équation de Brinkman (*i. e.* une équation de Stokes avec un terme supplémentaire linéaire d'ordre 0 pour la vitesse).

Ce résultat est démontré en construisant un prolongement de la pression qui est borné dans $L^2(\Omega)$ (suivant en cela une idée de L. Tartar [9]), ce qui permet d'adopter les méthodes développées par D. Cioranescu et F. Murat dans [4] pour le problème de Dirichlet pour le Laplacien. Un cadre abstrait d'hypothèses *a priori* est introduit dans lequel les théorèmes sont démontrés, puis ces hypothèses sont vérifiées dans le cas concret décrit ci-dessus. Sur ce sujet on peut consulter les travaux de V. A. Marcenko et E. Ja. Hrouslov [6], A. Brillard [3], J. Rubinstein [7], T. Levy [5] et E. Sanchez-Palencia [8].

I. CADRE ABSTRAIT. — Soit Ω un ouvert borné régulier connexe de R^N (avec $N \geqq 2$). Pour chaque $\varepsilon > 0$ on définit une famille $(T_i^\varepsilon)_{i=1}^{N(\varepsilon)}$ (les trous) de fermés réguliers inclus dans Ω et un ouvert perforé Ω_ε défini par :

$$\Omega_\varepsilon = \Omega - \bigcup_{i=1}^{N(\varepsilon)} T_i^\varepsilon.$$

Soit $f \in [L^2(\Omega)]^N$. Pour chaque $\varepsilon > 0$ on sait que le problème de Stokes (1) admet une solution unique :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \textit{Trouver } (u_\varepsilon, p_\varepsilon) \in [H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^N \times [L^2(\Omega_\varepsilon)/R] \textit{ tel que :} \\ \nabla p_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon = f \quad \textit{dans } \Omega_\varepsilon \\ \nabla . u_\varepsilon = 0 \quad \textit{dans } \Omega_\varepsilon \end{array} \right.$$

Il est facile de voir que $\tilde{u}_\varepsilon$, le prolongement par 0 dans $\Omega - \Omega_\varepsilon$ de la vitesse u_ε, est borné dans $[H_0^1(\Omega)]^N$. Pour passer à la limite dans (1), on se place dans un cadre abstrait d'hypothèses; on vérifiera dans la partie (II) ces hypothèses dans le cas des trous décrits dans l'introduction.

Hypothèses (H 1) *à* (H 6). — On suppose que les trous T_i^ε sont tels qu'il existe des fonctions w_k^ε, q_k^ε, μ_k et une application R_ε telles que pour $1 \leqq k \leqq N$ on a :

(H 1) $w_k^\varepsilon \in [H^1(\Omega)]^N$, $q_k^\varepsilon \in L^2(\Omega)$.

(H 2) $w_k^\varepsilon = 0$ sur les trous T_i^ε et $\nabla . w_k^\varepsilon = 0$ dans Ω.

(H 3) Soit e_k le k-ième vecteur de la base canonique de R^N :

$$\left\{\begin{array}{l} w_k^\varepsilon \rightharpoonup e_k \textit{ dans } [H^1(\Omega)]^N \textit{ faible} \\ q_k^\varepsilon \rightharpoonup 0 \textit{ dans } L^2(\Omega) \textit{ faible.} \end{array}\right.$$

(H 4) $\mu_k \in [W^{-1,\infty}(\Omega)]^N$.

(H 5) Pour toute suite v_ε et pour tout v vérifiant :

$$\left\{\begin{array}{l} v_\varepsilon \rightharpoonup v \textit{ dans } [H^1(\Omega)]^N \textit{ faible} \\ v_\varepsilon = 0 \textit{ sur les trous } T_i^\varepsilon \end{array}\right.$$

et pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ on a :

$$\langle \nabla q_k^\varepsilon - \Delta w_k^\varepsilon, \varphi v_\varepsilon \rangle_{H^{-1}, H_0^1(\Omega)} \to \langle \mu_k, \varphi v \rangle_{H^{-1}, H_0^1(\Omega)}$$

$$(H\,6)\quad \left\{\begin{array}{c} R_\varepsilon \in L([H_0^1(\Omega)]^N; [H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^N) \\ u \in [H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^N \Rightarrow R_\varepsilon u = u \textit{ dans } \Omega_\varepsilon \\ \nabla . u = 0 \textit{ dans } \Omega \Rightarrow \nabla . R_\varepsilon u = 0 \textit{ dans } \Omega_\varepsilon \\ \| R_\varepsilon u \|_{H_0^1(\Omega_\varepsilon)} \leqq C \| u \|_{H_0^1(\Omega)} \textit{ où C ne dépend pas de } \varepsilon. \end{array}\right.$$

Proposition 1. — *On définit une matrice* $M \in [W^{-1,\infty}(\Omega)]^{N^2}$ *par :* $M e_k = \mu_k$.

Des hypothèses (H 1) *à* (H 5) *on déduit que :* $\mu_k . e_i = \lim_{\varepsilon \to 0} \nabla w_k^\varepsilon . \nabla w_i^\varepsilon$ *dans* $\mathcal{D}'(\Omega)$. *Par conséquent* M *est une matrice symétrique positive au sens suivant :*

$$\langle M \varphi, \varphi \rangle_{H^{-1}, H_0^1(\Omega)} \geqq 0 \quad \textit{pour tout} \quad \varphi \in [C_0^\infty(\Omega)]^N.$$

Théorème 2. — *S'il existe un opérateur* R_ε *qui vérifie* (H 6), *alors on peut construire un opérateur de prolongement* P_ε *de* $L^2(\Omega_\varepsilon)$ *dans* $L^2(\Omega)$ *tel que pour tout* $q_\varepsilon \in L^2(\Omega_\varepsilon)$ *on a :*

(i) $P_\varepsilon(q_\varepsilon) = q_\varepsilon$ *dans* Ω_ε;

(ii) $\| P_\varepsilon(q_\varepsilon) \|_{L^2(\Omega)} \leqq C \| q_\varepsilon \|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}$ *où* C *ne dépend pas de* ε;

(iii) $\| \nabla [P_\varepsilon(q_\varepsilon)] \|_{H^{-1}(\Omega)} \leqq C \| \nabla q_\varepsilon \|_{H^{-1}(\Omega_\varepsilon)}$ *où* C *ne dépend pas de* ε.

Démonstration. — On suit une idée de L. Tartar [9]. On définit pour tout $q_\varepsilon \in L^2(\Omega_\varepsilon)$ une fonction $F_\varepsilon \in [H^{-1}(\Omega)]^N$ telle que :

$$\langle F_\varepsilon, u \rangle_{H^{-1}, H_0^1(\Omega)} = \langle \nabla q_\varepsilon, R_\varepsilon u \rangle_{H^{-1}, H_0^1(\Omega_\varepsilon)} \quad \text{pour tout } u \in [H_0^1(\Omega)]^N.$$

Les propriétés de R_ε [*voir* (H 6)] font qu'il existe $Q_\varepsilon \in L^2(\Omega)$ tel que : $F_\varepsilon = \nabla Q_\varepsilon$.

On définit alors l'opérateur P_ε par : $P_\varepsilon(q_\varepsilon) = Q_\varepsilon$.

Théorème 3. — *On se place sous les hypothèses* (H 1) *à* (H 6). *Soit* $(u_\varepsilon, p_\varepsilon)$ *la solution de* (1). *Alors* $(\tilde{u}_\varepsilon, P_\varepsilon(p_\varepsilon))$ *converge faiblement vers* (u, p) *dans* $[H_0^1(\Omega)]^N \times [L^2(\Omega)/R]$ *où* (u, p) *est l'unique solution de :*

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} \textit{Trouver } (u, p) \in [H_0^1(\Omega)]^N \times [L^2(\Omega)/R] \textit{ tel que :} \\ \qquad \nabla p - \Delta u + M u = f \quad \textit{dans } \Omega \\ \qquad \nabla . u = 0 \quad \textit{dans } \Omega \end{array}\right.$$

où M *est la matrice définie dans la proposition* 1.

Démonstration. — Le théorème 2 garantit l'existence d'un prolongement borné de la pression grâce à (H 6), et les hypothèses abstraites (H 1) à (H 5) ont justement été choisies pour permettre le passage à la limite dans la formulation variationnelle de (1) par la méthode de l'énergie (*cf.* [10] et [4]); pour les détails voir [1].

Remarque. — Les hypothèses (H 1) à (H 5) sont semblables à celles de [4] où était étudié le problème de Dirichlet pour le Laplacien. Par contre l'hypothèse (H 6) est originale et permet de définir un prolongement de la pression en suivant une idée de L. Tartar [9].

Remarque. — Dans le cas où $N=2$ ou $N=3$ les théorèmes 2 et 3 se généralisent aux équations de Navier-Stokes. Le terme non linéaire se conserve sans changement car si $\tilde{u}_\varepsilon \rightharpoonup u$ dans $[H_0^1(\Omega)]^N$ faible, alors $\tilde{u}_\varepsilon . \nabla \tilde{u}_\varepsilon \to u . \nabla u$ dans $[H^{-1}(\Omega)]^N$ fort, et ce dernier terme peut être traité comme la force f (*cf.* [1]).

THÉORÈME 4. — *On se place sous les hypothèses* (H 1) *à* (H 6) *et on suppose en outre que la solution u de* (2) *vérifie :*

$$u \in [W_0^{1, N+\theta}(\Omega)]^N \quad \textit{avec} \quad \theta > 0 \quad \textit{pour} \ N \geqq 2. \tag{3}$$

Alors :

$$\left\{ \begin{aligned} &\lim_{\varepsilon \to 0} \| \tilde{u}_\varepsilon - \sum_{k=1}^{N} u_k w_k^\varepsilon \|_{H_0^1(\Omega)} = 0 \\ &\lim_{\varepsilon \to 0} \| p_\varepsilon - p - \sum_{k=1}^{N} u_k q_k^\varepsilon \|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} = 0. \end{aligned} \right. \tag{4}$$

La démonstration repose sur l'étude de la semi-continuité et de la continuité faibles de l'énergie (*cf.* [1]).

II. VÉRIFICATION DES HYPOTHÈSES (H 1) À (H 6) DANS LE CAS DE TROUS RÉPARTIS PÉRIODIQUEMENT DANS Ω. — On étudie ici l'exemple considéré dans l'introduction. Soit Ω un ouvert borné régulier connexe de R^N (avec $N \geqq 2$) de frontière $\partial\Omega$. On recouvre Ω par un maillage régulier de pavés P_i^ε $[1 \leqq i \leqq N(\varepsilon)]$ tous identiques, à une translation près, au pavé $]-\varepsilon; +\varepsilon[^N$. Chaque pavé P_i^ε entièrement contenu dans Ω est percé en son centre d'un trou T_i^ε identique, à une translation près, au fermé $a_\varepsilon T$ (on suppose que T ne dépend pas de ε et est inclus dans une boule de rayon 1).

On a : $N(\varepsilon) = |\Omega|/(2\varepsilon)^N [1 + o(1)]$. On choisit la taille des trous a_ε telle que :

$$a_\varepsilon = C_0 \varepsilon^{N/(N-2)} \quad \textit{pour} \ N \geqq 3, \qquad a_\varepsilon = e^{-C_0/\varepsilon^2} \quad \textit{pour} \ N = 2 \qquad \textit{avec} \quad C_0 > 0. \tag{5}$$

II-A. *Vérification de* (H 6). — On construit explicitement R_ε dans chaque pavé P_i^ε.

Soit $u \in [H_0^1(\Omega)]^N$, dans chaque pavé P_i^ε on définit $R_\varepsilon u$ par :

dans T_i^ε : $R_\varepsilon u = 0$

$$\text{dans } C_i^\varepsilon : \quad \left\{ \begin{aligned} &R_\varepsilon u \ \textit{solution unique dans} \ [H^1(C_i^\varepsilon)]^N \ \textit{de :} \\ &\nabla q_\varepsilon - \Delta(R_\varepsilon u) = -\Delta u \quad \textit{dans} \ C_i^\varepsilon \\ &\nabla . (R_\varepsilon u) = \nabla . u + \frac{1}{|C_i^\varepsilon|} \int_{T_i^\varepsilon} \nabla . u \quad \textit{dans} \ C_i^\varepsilon \\ &R_\varepsilon u = 0 \quad \textit{sur} \ \partial T_i^\varepsilon \\ &R_\varepsilon u = u \quad \textit{sur} \ \partial C_i^\varepsilon \cap \partial K_i^\varepsilon \end{aligned} \right.$$

dans K_i^ε : $R_\varepsilon u = u$

(où C_i^ε est la boule de rayon ε percée en son centre du trou T_i^ε. et K_i^ε est le complémentaire de $T_i^\varepsilon \cup \bar{C}_i^\varepsilon$ dans P_i^ε).

PROPOSITION 5. — *L'opérateur* R_ε *ainsi défini vérifie* (H 6) *si la taille des trous* a_ε *est donnée par* (5).

Démonstration. — Seule l'estimation de $\|R_\varepsilon u\|_{H_0^1(\Omega_\varepsilon)}$ n'est pas immédiate. On l'obtient grâce aux deux lemmes suivants.

Soit C_η la boule de rayon 1 percée en son centre du trou ηT, avec $0<\eta<1$.

LEMME 6. — *Il existe un opérateur linéaire* L *qui opère de* $H^1(C_\eta)$ *dans lui-même, tel que pour tout* $v\in H^1(C_\eta)$ *on a :*

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{c} L(v)=v \text{ sur la sphère de rayon } 1 \\ L(v)=0 \text{ sur } \partial(\eta T) \\ \|\nabla(Lv)\|_{L^2(C_\eta)}\leqq C[\|\nabla v\|_{L^2(C_\eta)}+K_\eta\|v\|_{L^2(C_\eta)}] \\ \text{où C ne dépend pas de } \eta \end{array}\right.$$

avec :

$$(7)\qquad K_\eta=\eta^{(N-2)/2}\quad pour\ N\geqq 3,\qquad K_\eta=\frac{1}{\sqrt{|\operatorname{Log}\eta|}}\quad pour\ N=2.$$

LEMME 7. — *Pour tout* $f\in L^2(C_\eta)$ *tel que* $\int_{C_\eta} f=0$, *il existe* $v\in[H_0^1(C_\eta)]^N$ *tel que :*

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{c} \text{l'application } (f\to v) \text{ est linéaire} \\ \nabla . v=f \quad \text{dans } C_\eta \\ \|v\|_{H_0^1(C_\eta)}\leqq C\|f\|_{L^2(C_\eta)} \\ \text{où C ne dépend pas de } \eta. \end{array}\right.$$

II-B. *Vérification de* (H 1) *à* (H 5). — Si chaque T_i^ε est une boule de rayon a_ε donné par (5), on peut calculer explicitement des fonctions w_k^ε, q_k^ε et μ_k qui vérifient (H 1) à (H 5) (*cf.* [1]). Dans ce cas on trouve la valeur exacte de M :

$$(9)\quad \left\{\begin{array}{l} M=\dfrac{N(N-2)}{N-1}\dfrac{S_N}{2^N}C_0^{N-2}\,\mathrm{Id} \qquad pour \quad N\geqq 3 \\ M=\dfrac{\pi}{C_0}\mathrm{Id} \qquad pour \quad N=2 \\ \text{où } S_N \text{ est la surface de la sphère unité de } R^N. \end{array}\right.$$

Si les trous ne sont pas des boules on ne peut plus calculer explicitement ces fonctions, néanmoins on peut vérifier les hypothèses (H 1) à (H 5) en utilisant d'une part des résultats de comparaison (par le principe de Dirichlet) avec les fonctions calculées dans le cas sphérique, et d'autre part des estimations à l'infini de solutions du problème de Stokes à l'extérieur d'un obstacle borné. Le résultat qui suit donne une caractérisation de la matrice M. On remarquera le cas paradoxal de la dimension $N=2$.

PROPOSITION 8. — *En dimension* $N\geqq 3$, *on appelle* F_k *la force exercée sur le trou modèle* T *par un écoulement de Stokes adhérent au bord de* T, *et valant* e_k *à l'infini. Si* a_ε *vaut* $C_0\,\varepsilon^{N/(N-2)}$, *alors les trous* T_i^ε *vérifient les hypothèses* (H 1) *à* (H 5), *et on trouve :*

$$M=\frac{C_0^{N-2}}{2^N}(F_k)_{1\leqq k\leqq N}$$

en dimension $N=2$, *quelle que soit la forme du trou* T, *si* a_ε *vaut* $\exp(-C_0/\varepsilon^2)$, *alors les trous* T_i^ε *vérifient les hypothèses* (H 1) *à* (H 5), *et on trouve :*

$$M=\frac{\pi}{C_0}\,\mathrm{Id}.$$

Remarque. — L'équation homogénéisée obtenue (loi de Brinkman) résulte évidemment de la situation géométrique considérée [trou de taille a_ε donnée par (5) avec une période 2ε]. D'autres situations peuvent conduire à des résultats radicalement différents : ainsi si l'on considère des trous de taille ε périodiquement répartis avec une période 2ε, on obtient à la limite une loi de Darcy à partir des équations de Stokes (*cf.* [9] et [2]).

Note remise le 28 mars 1989, acceptée après révision le 12 juin 1989.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] G. ALLAIRE, *Homogenization of Navier-Stokes equations in open sets perforated with tiny holes*, en préparation.

[2] G. ALLAIRE, Homogenization of the Stokes flow in a connected porous medium, *Asymptotic Analysis* (à paraître).

[3] A. BRILLARD, Asymptotic analysis of incompressible and viscous fluid flow through porous media, *Ann. Fac. Sci. Toulouse*, 8, 2, 1986, p. 225-252.

[4] D. CIORANESCU et F. MURAT, Un terme étrange venu d'ailleurs, *Nonlinear partial differential equations and their applications, Collège de France seminar*, 2 *et* 3, H. BRÉZIS et J.-L. LIONS éd., Research notes in mathematics, 60 et 70, Pitman, London, 1982.

[5] T. LEVY, Fluid flow through an array of fixed particles, *Int. J. Engin. Sci.*, 21, 1983, p. 11-23.

[6] V. A. MARCENKO et E. Ja. HROUSLOV, *Problèmes aux limites dans des domaines avec frontières finement granulées* (en russe), Naukova Dumka, Kiev, 1974.

[7] J. RUBINSTEIN, On the macroscopic description of slow viscous flow past a random array of spheres, *J. Stat. Phys.*, 1986.

[8] E. SANCHEZ-PALENCIA, On the asymptotics of the fluid flow past an array of fixed obstacles, *Int. J. Engin. Sci.*, 20, 1982, p. 1291-1301.

[9] L. TARTAR, Convergence of the homogenization process, *Appendice au livre de E. Sanchez-Palencia : Non-homogeneous media and vibration theory, Lecture notes in physics*, 127, Springer, 1980.

[10] L. TARTAR, *Cours Peccot*, Collège de France, mars 1977.

Centre d'Études nucléaires de Saclay,
I.R.D.I./D.E.M.T., S.E.R.M.A./L.E.T.R., Bât. n° 70, 91191 *Gif-sur-Yvette Cedex.*