Ecole Polytechnique, Promotion 2017
Approximation numérique et optimisation (MAP 411)
Deuxième devoir obligatoire à rendre
au plus tard le lundi 22 octobre 2018

Sur un segment de longueur $L > 0$, on étudie l'équation de convection-diffusion suivante

$$\begin{cases} Vu'(x) - \nu u''(x) = f(x) & \text{pour } x \in (0, L) \\ u(0) = 0 \text{ et } u'(L) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

où $V > 0$ est une vitesse constante, $\nu > 0$ est le coefficient de diffusion et $f(x)$ est un terme source (une fonction continue). On introduit l'espace suivant

$$V = \left\{ \phi \in C^1[0, L] \ \text{ tel que } \phi(0) = 0 \right\}.$$

1. Proposer une formulation variationnelle pour (1), c'est-à-dire donner les expressions d'une forme bilinéaire $a(u, v)$ et d'une forme linéaire $L(v)$ qui définissent le problème variationnel

$$\text{trouver } u \in V \text{ tel que } \quad a(u, v) = L(v) \quad \forall\, v \in V. \tag{2}$$

2. On suppose que $u \in C^2[0, L]$. Vérifiez que u est solution de (1) si et seulement si u est solution de (2).
3. Soit un entier $n \geq 1$. Pour $h = L/n$ on définit un maillage $x_j = jh$, $0 \leq j \leq n$. On introduit l'espace discret V_h, de dimension n, engendré par la base $\phi_j(x) = \phi(\frac{x - x_j}{h})$, pour $1 \leq j \leq n$, où ϕ est la fonction chapeau définie par $\phi(x) = \max(0, 1 - |x|)$. Si $v_h \in V_h$, que peut-on dire de $v_h(0)$? Et de $v_h(L)$?
4. On introduit l'approximation variationnelle suivante

$$\text{trouver } u_h \in V_h \text{ tel que } \quad a(u_h, v_h) = L(v_h) \quad \forall\, v_h \in V_h. \tag{3}$$

Montrer que résoudre (3) est équivalent à résoudre un système linéaire $\mathcal{K}U = b$, de taille n, où on donnera les formules pour la matrice de rigidité $\mathcal{K}$ et le second membre b.

5. Vérifiez que la forme bilinéaire $a(u, v)$ dans (2) est coercive pour une certaine norme sur V. En déduire que la matrice de rigidité est inversible.
6. Calculer explicitement la matrice de rigidité $\mathcal{K}$. On fera attention que la première et la dernière ligne de cette matrice sont différentes des autres lignes.
7. Pour $\nu = 0$, calculer explicitement la solution de $\mathcal{K}U = b$ (on séparera le cas des composantes paires et impaires de U et pour simplifier on pourra supposer n pair ou impair). Comparer avec la solution exacte de (1) dans ce cas. Que peut-on conclure ?