ECOLE POLYTECHNIQUE
Analyse numérique et optimisation (MAP431)
Contrôle classant
Lundi 30 juin 2008

Durée : 4 heures

Les deux problèmes sont totalement indépendants et à rédiger sur des copies de couleurs distinctes.

Problème 1 - Estimation d'erreur a posteriori (Copies roses, noté sur 12)

Remarque: Les parties "Estimation a posteriori" (questions 4 à 8) et "Efficacité" (questions 9 à 13) peuvent être traitées indépendamment. De plus, ces deux parties ne dépendent que de la question 2.a. de la partie "Formulation variationnelle et approximation". Tout au long de ce problème, C est une constante générique (elle ne désigne pas la "même" constante d'une question à l'autre).

Soit Ω un ouvert polygonal borné connexe de $\mathbb{R}^2$. On suppose que sa frontière $\Gamma = \partial\Omega$ se décompose en deux parties Γ_D et Γ_N telles que Γ_D soit de mesure non nulle. On considère le problème aux limites suivant

$$\left\{\begin{array}{rl} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_D \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sur } \Gamma_N \end{array}\right. \qquad (1)$$

où $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\Gamma_N)$. L'objet de ce problème consiste à estimer l'erreur effectuée lors du calcul d'une approximation u_h de u par la méthode des éléments finis $\mathbb{P}_1$ en fonction non pas de la solution u du problème au limite (qui est inconnue) mais des données f, g et Ω ainsi que de la solution u_h du problème discrétisé.

Formulation variationnelle et approximation

1) Déterminer la formulation variationnelle vérifiée par la solution du problème aux limites (1) et montrer que ce problème admet une solution unique. On admettra le résultat du cours (cf. remarque du poly, p.73) qui affirme qu'il existe une constante C dépendant uniquement de Ω et de Γ_D telle que

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \le C\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \text{ pour tout } u \in X,$$

où

$$X := \{u \in H^1(\Omega) \text{ tel que } u(x) = 0 \text{ presque partout sur } \Gamma_N\}.$$

2) Soit $\mathcal{T}_h$ une suite de maillages réguliers de Ω (voir cours, définition **6.3.11**). On note $\mathcal{E}_h$ l'ensemble des arêtes du maillage et on suppose que toute arête du maillage appartenant au bord du domaine Γ est incluse soit dans Γ_N, soit dans Γ_D. On note $\mathcal{E}_{h,N}$ les arêtes du maillage incluses dans Γ_N, $\mathcal{E}_{h,D}$ les arêtes incluses dans Γ_D et $\mathcal{E}_{h,\Omega}$ les arêtes du maillage incluses dans Ω.

$$\mathcal{E}_{h,\Omega} := \{E \in \mathcal{E}_h \;:\; E \subset \Omega\},$$

$$\mathcal{E}_{h,N} := \{E \in \mathcal{E}_h \;:\; E \subset \Gamma_N\}; \quad \mathcal{E}_{h,D} := \{E \in \mathcal{E}_h \;:\; E \subset \Gamma_D\}$$

On introduit les fonctions $f(h)$ (respectivement $g(h)$), approximations de f (respectivement de g), constantes par morceaux sur chaque triangle T de $\mathcal{T}_h$ (respectivement sur chaque arête E de $\mathcal{E}_{h,N}$), définies par

$$f(h)(x) := f_T := |T|^{-1} \int_T f(y)dy \text{ pour tout } x \in T \tag{2}$$

et

$$g(h)(x) := g_E := |h_E|^{-1} \int_E g(y)dy \text{ pour tout } x \in E, \tag{3}$$

où $|T|$ est l'aire du triangle T et h_E la longueur de l'arête E.

On note $u(h)$ la solution du problème aux limites

$$\begin{cases} -\Delta u(h) = f(h) & \text{dans } \Omega \\ u(h) = 0 & \text{sur } \Gamma_D \\ \frac{\partial u}{\partial n}(h) = g(h) & \text{sur } \Gamma_N \end{cases} \tag{4}$$

a. Déterminer la formulation variationnelle vérifiée par $u(h)$ et établir qu'elle admet une solution unique.

b. Montrer qu'il existe une constante C ne dépendant que de Ω et de Γ_D telle que

$$\|u - u(h)\|_{H^1(\Omega)} \leq C(\|f - f(h)\|_{L^2(\Omega)} + \|g - g(h)\|_{L^2(\Gamma_N)}).$$

c. Soit T_0 le triangle de référence défini par

$$T_0 := \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \text{ et } x_1 + x_2 \leq 1\}.$$

Montrer que pour tout triangle T du maillage, il existe A_T matrice 2×2 et $b_T \in \mathbb{R}^2$ tels que $T = F_T(T_0)$ où F_T est l'application affine définie par $F_T(x) = A_T x + b_T$. Prouver qu'il existe une constante C indépendante de h telle que pour tout triangle T du maillage on ait

$$\|A_T\| \leq C h_T,$$

où h_T est le diamètre du triangle T. (c.f. poly, page 126 pour un rappel de la définition du diamètre de T.)
Indication : La propriété à démontrer est indépendante de la norme matricielle considérée. On pourra par exemple établir ce résultat pour la norme matricielle subordonnée à la norme vectorielle euclidienne, voir poly p.131. Dans ce cas, $C = \rho_{T_0}^{-1}$ où ρ_{T_0} est le diamètre du cercle inscrit dans T_0).

De même, monter qu'il existe une constante C indépendante de h telle que

$$\|A_T^{-1}\| \leq C h_T^{-1}.$$

d. On rappelle que l'inégalité de Poincaré-Wirtinger assure que si ω est un domaine borné régulier (note: les coins sont autorisés), il existe une constante C_ω ne dépendant que de ω telle que pour tout $f \in H^1(\omega)$, on a

$$\int_\omega |f - m(f)|^2 \leq C_\omega \int_\omega |\nabla f|^2,$$

où $m(f)$ est la moyenne de f sur ω (c.f. poly, equation (5.28)). En appliquant l'inégalité de Poincaré-Wirtinger au triangle de référence T_0, montrer, en effectuant un changement de variable approprié, qu'il existe une constante C (indépendante de h) telle que pour tout triangle T du maillage et toute fonction $f \in H^1(\Omega)$, on a

$$\int_T |f - f(h)|^2 \leq C h_T^2 \int_T |\nabla f|^2.$$

On rappelle que h_T est le diamètre du triangle T.

e. Montrer que si $g \in H^1(\Gamma_N)$, il existe une constante C indépendante de h et de g telle que pour toute arête $E \in \mathcal{E}_{h,N}$,

$$\int_E |g - g(h)|^2 \leq C h_E^2 \int_E |\nabla g|^2.$$

En déduire que si $f \in H^1(\Omega)$ et $g \in H^1(\Gamma_N)$, alors $u(h)$ converge vers u lorsque h tend vers zéro et donner une estimation de l'erreur $\|u - u(h)\|_{H^1(\Omega)}$.

3) On note X_h l'espace des éléments finis $\mathbb{P}_1$ de $\mathcal{T}_h$ s'annulant sur Γ_D

$$X_h := \{v \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \ : \ v_{|T} \in \mathbb{P}_1 \text{ pour tout triangle } T \in \mathcal{T}_h, \quad v = 0 \text{ sur } \Gamma_D\}.$$

Soit $u_h \in X_h$ la solution du problème variationnel

$$\int_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla v_h = \int_\Omega f(h) v_h + \int_{\Gamma_N} g(h) v_h \tag{5}$$

pour tout $v_h \in X_h$. Montrer que (5) admet une solution unique.

Estimation a posteriori

On souhaite déterminer une majoration de l'erreur $\|u_h - u(h)\|_{H^1(\Omega)}$ en fonction de u_h et des données du problème (où u_h est la solution du problème (5) et $u(h)$ du problème (4)). Pour chaque arête E du maillage, on note n_E sa normale unitaire. On oriente n_E de manière arbitraire, sauf pour les éléments de $\mathcal{E}_{h,N}$ pour lesquels on suppose que n_E coïncide avec la normale extérieure à Ω. On note $\mathcal{N}_h$ l'ensemble des nœuds du maillage. Pour chaque triangle T du maillage, on note $\mathcal{N}(T)$ l'ensemble de ses sommets. De plus, pour tout nœud $x \in \mathcal{N}_h$ du maillage, on note

$$\omega_x := \bigcup_{x \in \mathcal{N}(T)} T,$$

l'union des triangles du maillage dont l'un des sommet est le nœud x.

4) Soit $x \in \mathcal{N}_h$. Pour tout $\varphi \in X$, on note $\pi_x \varphi \in \mathbb{R}$ la moyenne de φ sur l'ouvert ω_x. On définit I_h l'opérateur de X à valeurs dans X_h par

$$I_h \varphi(x) = (\pi_x \varphi)(x) \text{ pour tout } x \in \mathcal{N}_h \setminus \Gamma_D$$

et

$$I_h \varphi(x) = 0 \text{ pour tout } x \in \mathcal{N}_h \cap \Gamma_D.$$

a. Expliquer pourquoi la définition introduite permet de définir $I_h \varphi \in X_h$ de manière univoque.

b. Montrer qu'il existe un entier m indépendant de h tel que pour tout x, sommet du maillage,

$$\mathrm{Card}\{T \in \mathcal{T}_h \ ; \ T \subset \omega_x\} \leq m$$

(On rappelle que $\mathcal{T}_h$ est une suite de maillages réguliers). En déduire qu'il existe une constante C indépendante de h telle que pour tout sommet x et tout triangle T du maillage

$$T \in \omega_x \Longrightarrow \mathrm{diam}(\omega_x) \leq C h_T.$$

c. On peut généraliser le résultat obtenu à la question **2.e**. Plus précisément, soit $\hat{\Omega}$ et Ω deux ouverts bornés, réguliers et connexes de $\mathbb{R}^2$ et F une application continue et bijective de $\hat{\Omega}$ vers Ω, $\mathcal{C}^1$ par morceaux. On admettra qu'il existe une constante C ne dépendant que de $\hat{\Omega}$ telle que pour tout $\varphi \in H^1(\Omega)$

$$\|\varphi - |\Omega|^{-1} \int_\Omega \varphi\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C \frac{\max_{\hat{x}\in\hat{\Omega}} \det(\nabla F(\hat{x}))}{\min_{\hat{x}\in\hat{\Omega}} \det(\nabla F(\hat{x}))} \max_{\hat{x}\in\hat{\Omega}} \|\nabla F(\hat{x})\|^2 \|\nabla\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} \tag{6}$$

Déduire de l'inégalité (6) et de la question **4.b** qu'il existe une constante C indépendante de h telle que pour tout sommet x du maillage et tout élément $v \in H^1(\omega_x)$, on a

$$\|v - \pi_x v\|_{L^2(\omega_x)} \leq C(\mathrm{diam}(\omega_x)) \|\nabla v\|_{L^2(\omega_x)}.$$

Indication: Montrer que pour tout sommet x du maillage, ω_x est l'image d'un polygone régulier (dépendant de x mais dont le nombre de coté est borné indépendamment de h et x) par une application affine par morceaux.

d. Montrer qu'il existe une constante C indépendante de h telle que pour tout triangle T du maillage et tout $p \in \mathbb{P}_1$, on a

$$\|p\|_{L^\infty(T)} \leq C|T|^{-1/2}\|p\|_{L^2(T)}$$

et

$$\|p\|_{L^2(T)} \leq C|T|^{1/2}\|p\|_{L^\infty(T)}.$$

e. Montrer que pour tout triangle $T \in \mathcal{T}_h$, toute arête $E \in \mathcal{E}_h$ et toute fonction $\varphi \in X$, on a

$$\|\varphi - I_h\varphi\|_{L^2(T)} \leq C h_T \|\varphi\|_{H^1(\widetilde{\omega}_T)}$$

et

$$\|\varphi - I_h\varphi\|_{L^2(E)} \leq C h_E^{1/2} \|\varphi\|_{H^1(\widetilde{\omega}_E)},$$

où

$$\widetilde{\omega}_T = \bigcup_{x\in\mathcal{N}(T)} \omega_x \text{ et } \widetilde{\omega}_E = \bigcup_{x\in\mathcal{N}(E)} \omega_x$$

et $\mathcal{N}(T)$ et $\mathcal{N}(E)$ désignent respectivement l'ensemble des sommets de T et E.
Indication: On pourra utiliser la relation $(\varphi - I_h\varphi)|_T = \sum_{x\in\mathcal{N}(T)}(\varphi - I_h\varphi(x))\phi_x$, où ϕ_x est la fonction de base associée au nœud x du maillage.

5) Pour toute fonction $\varphi \in L^2(\Omega)$ dont la restriction $\varphi|_T$ à chaque triangle $T \in \mathcal{T}_h$ est continue et toute arête $E \in \mathcal{E}_{h,\Omega}$, on note $[\varphi]_E$ le saut de la fonction φ le long de l'arête E définie pour tout $x \in E$ par

$$[\varphi]_E(x) = \lim_{t \to 0^+} (\varphi(x + t n_E) - \varphi(x - t n_E)).$$

Montrer que pour tout $v \in X$,

$$\begin{aligned}\int_\Omega f(h)v + \int_{\Gamma_N} g(h)v - \int_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla v \\ = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T f(h)v + \sum_{E \in \mathcal{E}_{h,N}} \int_E (g(h) - n_E \cdot \nabla u_h)v + \sum_{E \in \mathcal{E}_{h,\Omega}} [n_E \cdot \nabla u_h]_E v. \quad (7)\end{aligned}$$

6) Déduire des deux questions précédentes et du problème variationnel vérifié par u_h qu'il existe une constante C telle que pour tout $v \in X$, on a

$$\begin{aligned}\int_\Omega f(h)v + \int_{\Gamma_N} g(h)v - \int_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla v \le C\|v\|_{H^1(\Omega)} \Bigg\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T h_T^2 \|f(h)\|^2_{L^2(T)} \\ + \sum_{E \in \mathcal{E}_{h,N}} h_E \|g(h) - n_E \cdot \nabla u_h\|^2_{L^2(E)} + \sum_{E \in \mathcal{E}_{h,\Omega}} h_E \|[n_E \cdot \nabla u_h]_E\|^2_{L^2(E)} \Bigg\}^{1/2}. \quad (8)\end{aligned}$$

7) En conclure qu'il existe une constante C indépendante de h telle que

$$\|u(h) - u_h\|^2_{H^1(\Omega)} \le C \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T^2, \quad (9)$$

où

$$\begin{aligned}\eta_T = \Bigg\{ h_T^2 \|f_T\|^2_{L^2(T)} + \frac{1}{2} \sum_{E \in \mathcal{E}_{h,\Omega} \cap \mathcal{E}(T)} h_E \|[n_E \cdot \nabla u_h]_E\|^2_{L^2(E)} \\ + \sum_{E \in \mathcal{E}_{h,N} \cap \mathcal{E}(T)} h_E \|g_E - n_E \cdot \nabla u_h\|^2_{L^2(E)} \Bigg\}^{1/2}, \quad (10)\end{aligned}$$

et $\mathcal{E}(T)$ est l'ensemble des arêtes du triangle T.

Efficacité

L'inégalité (9) nous permet de majorer l'erreur induite par l'utilisation de la méthode des éléments finis $\mathbb{P}_1$. Cependant, il est naturel de se demander si la majoration obtenue n'est pas trop grossière. Une estimation a posteriori est dite efficace si l'erreur $\|u(h) - u_h\|_{H^1(\Omega)}$ est du même ordre de grandeur que l'estimateur, c'est à dire (dans notre cas) s'il existe une constante $C > 0$ indépendante de h telle que

$$C \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T^2 \le \|u(h) - u_h\|^2_{H^1(\Omega)}, \quad (11)$$

où η_T est défini par (10), u_h est la solution du problème (5) et $u(h)$ du problème (4). Si l'estimateur et l'erreur sont équivalents (lorsque h tend vers zéro), on dit que l'estimation est asymptotiquement exacte.

8) On associe à chaque triangle T du maillage une fonction dite bulle b_T définie par

$$b_T(x) = \begin{cases} 27\lambda_1(x)\lambda_2(x)\lambda_3(x) & \text{si } x \in T \\ 0 & \text{si } x \in \Omega \setminus T \end{cases},$$

où $\lambda_1(x)$, $\lambda_2(x)$ et $\lambda_3(x)$ sont les coordonnées barycentriques de x dans T.

a. Montrer que b_T est une fonction continue sur $\overline{\Omega}$, que $0 \leq b_T \leq 1$ et que $\max_{x\in T} b_T(x) = 1$.

b. Montrer qu'il existe deux constantes positives c_1 et c_2 (indépendantes de h) telles que pour tout triangle T du maillage,

$$c_1 h_T^2 \leq \int_T b_T = \frac{9}{20}|T| \leq c_2 h_T^2.$$

c. Montrer qu'il existe une constante C telle que

$$\|\nabla b_T\|_{L^2(T)} \leq C h_T^{-1} \|b_T\|_{L^2(T)}.$$

(Indication: On pourra se ramener à un triangle de référence T_0 afin d'établir cette relation, en s'inspirant des questions **2.c** et **2.d**).

9) Dans cette question, on va chercher à obtenir une majoration du premier terme de l'estimateur η_T en fonction de l'erreur due à la discrétisation par éléments finis $\mathbb{P}_1$.

a. Montrer que pour tout triangle $T \in \mathcal{T}_h$,

$$\int_T f_T b_T = \int_T \nabla(u(h) - u_h) \cdot \nabla b_T.$$

b. Montrer qu'il existe une constante C, indépendante de f que pour tout triangle $T \in \mathcal{T}_h$,

$$|f_T||T|^{1/2} \leq C h_T^{-1} \|\nabla(u(h) - u_h)\|_{L^2(T)}.$$

En déduire que

$$h_T^2 \|f_T\|_{L^2(T)}^2 \leq C \|u(h) - u_h\|_{H^1(T)}^2.$$

10) On introduit un nouveau type de fonctions bulles. Soit $E \in \mathcal{E}_\Omega$ et T_1, T_2 les triangles situés de part et d'autres de celle-ci. On note b_E la fonction définie par

$$b_E(x) := \begin{cases} 4\lambda_1(x)\lambda_2(x) & \text{si } x \in T_1 \cup T_2 \\ 0 & \text{si } x \in \Omega \setminus (T_1 \cup T_2) \end{cases},$$

où $\lambda_1(x)$, $\lambda_2(x)$ sont les deux coordonnées barycentriques de x dans le triangle T_i ($i = 1$ ou 2) associées aux sommets de l'arête E. On pose $\omega_E = T_1 \cup T_2$.

a. Montrer que b_E est continue sur $\overline{\Omega}$, que $0 \leq b_E \leq 1$ et que $\max_{x\in T_1\cup T_2} b_E(x) = 1$.

b. Montrer qu'il existe deux constantes c_3 et c_4 (indépendantes de h) telles que pour toute arête $E \in \mathcal{E}_{h,\Omega}$ et pour tout triangle T du maillage inclus dans ω_E,

$$c_3 h_E^2 \leq \int_T b_E = \frac{1}{3}|T| \leq c_4 h_E^2.$$

Montrer de plus que

$$\int_E b_E = 2h_E/3.$$

c. Montrer qu'il existe une constante C telle que pour toute arête $E \in \mathcal{E}_{h,\Omega}$ et pour tout triangle T du maillage inclus dans ω_E,

$$\|\nabla b_E\|_{L^2(T)} \leq C h_E^{-1} \|b_E\|_{L^2(T)}.$$

11) Dans cette question, on va chercher à obtenir une majoration du deuxième terme de l'estimateur η_T en fonction de l'erreur due à la discrétisation par éléments finis $\mathbb{P}_1$.

a. Montrer que pour tout $E \in \mathcal{E}_{h,\Omega}$,

$$-\int_E [n_E \cdot \nabla u_h]_E b_E = \sum_{T \subset \omega_E} \int_T \left(f(h) b_E - \nabla(u(h) - u_h) \cdot \nabla b_E\right).$$

b. Montrer qu'il existe une constante C telle que pour tout arête $E \in \mathcal{E}_{h,\Omega}$,

$$|[n_E \cdot \nabla u_h]_E| h_E^{1/2} \leq \sum_{T \subset \omega_E} \left(h_E^{-1/2} \|\nabla(u(h) - u_h)\|_{L^2(T)} + h_E^{1/2} \|f_T\|_{L^2(T)} \right)$$

c. En déduire qu'il existe une constante C indépendante de h telle que

$$\|[n_E \cdot \nabla u_h]_E\|_{L^2(E)} \leq C h_E^{-1/2} \|u(h) - u_h\|_{H^1(\omega_E)}.$$

12) On étend (de manière élémentaire) la définition de b_E au cas où $E \in \mathcal{E}_{h,N}$. En d'autres termes, pour tout $E \in \mathcal{E}_{h,N}$, si T désigne l'unique triangle du maillage $\mathcal{T}_h$ contenant l'arête E, on pose

$$b_E(x) := \begin{cases} 4\lambda_1(x)\lambda_2(x) & \text{si } x \in T \\ 0 & \text{si } x \in \Omega \setminus T \end{cases},$$

où $\lambda_1(x)$ et $\lambda(x)$ sont les coordonnées barycentriques de x dans le triangle T associées aux sommets de l'arête E.

a. Montrer que pour toute arête $E \in \mathcal{E}_{h,N}$,

$$\int_E (g_E - n_E \cdot \nabla u_h) b_E = \int_{\omega_E} \nabla(u(h) - u_h) \cdot \nabla b_E - \int_{\omega_E} f(h) b_E.$$

En déduire qu'il existe une constante C telle que pour toute arête $E \in \mathcal{E}_{h,N}$,

$$\|g_E - n_E \cdot \nabla u_h\|_{L^2(E)} \leq C h_E^{-1/2} \|u(h) - u_h\|_{H^1(\omega_E)}.$$

13) Pour conclure... L'estimation a posteriori (9) est elle efficace ?

Problème 2 - Dynamique de Hellmann-Feynmann (Copies vertes, noté sur 8)

On considère un point matériel de masse $m > 0$ évoluant dans $\mathbb{R}^d$ sous l'action d'un potentiel V. On rappelle que la dynamique de ce point matériel est régie par les équations de Newton

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dq}{dt}(t) = v(t) \\ m\dfrac{dv}{dt}(t) = -\nabla V(q(t)) \end{array} \right. \tag{12}$$

où $q(t)$ et $v(t)$ désignent respectivement la position et la vitesse dans $\mathbb{R}^d$ du point matériel à l'instant t.

On s'intéresse au cas où la valeur $V(q)$ du potentiel en un point $q \in \mathbb{R}^d$ est obtenue en résolvant un certain problème d'optimisation paramétré par q (dynamiques d'Hellmann-Feynmann).

1) On suppose dans cette question que

$$V(q) = \inf_{y \in \mathcal{E}} E(q, y) \tag{13}$$

avec

$$\mathcal{E} = \{y \in \mathcal{H} \text{ tel que } c(y) = 0\},$$

où $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert et où $E : \mathbb{R}^d \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $c : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions de classe C^1. On suppose que pour tout $y \in \mathcal{H}$ tel que $c(y) = 0$, on a $c'(y) \neq 0$. On suppose en outre que pour tout $q \in \mathbb{R}^d$, le problème d'optimisation (13) admet un unique point de minimum $y(q)$, et que la fonction $q \mapsto y(q)$ est de classe C^1. On note $\nabla_q E(q, y)$ le gradient partiel de E par rapport à q.

a. Montrer que

$$\nabla V(q) = \nabla_q E(q, y(q)). \tag{14}$$

Indication : on rappelle que la règle de la chaîne conduit à

$$\frac{\partial V}{\partial q_i}(q) = \frac{\partial E}{\partial q_i}(q, y(q)) + \langle E'_y(q, y(q)), \frac{\partial y}{\partial q_i}(q)\rangle$$

où E'_y désigne la différentielle par rapport à y de la fonction E.

b. Quel est l'intérêt de la formule (14) ?

2) Soit n et p deux entiers naturels tels que $n \geq 2$ et $1 \leq p \leq n - 1$. On note $\mathcal{M}(n)$ l'espace des matrices réelles de taille $n \times n$, $\mathcal{M}_S(n)$ l'espace des matrices réelles symétriques de taille $n \times n$, I_n la matrice identité de rang n et A^* la transposée de la matrice A. On munit $\mathcal{M}(n)$ du produit scalaire de Frobenius défini par

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}(n) \times \mathcal{M}(n), \qquad (A, B)_{\mathrm{F}} = \mathrm{Tr}\,(A^* B) = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} B_{ij}$$

et on note $\| \cdot \|_{\mathrm{F}}$ la norme associée. On rappelle que si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_S(n)$, la notation $A \leq B$ signifie $x^* A x \leq x^* B x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

On examine dans la suite de ce problème le cas où

$$V(q) = \inf_{M \in \mathcal{K}} E(q, M) \tag{15}$$

avec

$$\mathcal{K} = \{M \in \mathcal{M}_S(n) \ \text{ tel que } \ 0 \leq M \leq I_n \ \text{ et } \ \text{Tr}\,(M) = p\}$$

et

$$E(q, M) = \text{Tr}\,(H(q)M) + \frac{1}{2}\|M\|_{\text{F}}^2,$$

$H(\cdot)$ désignant une fonction de $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathcal{M}_S(n)$ de classe C^1.

a. Montrer que $\mathcal{K}$ est un sous-ensemble compact, convexe, et non vide de $\mathcal{M}_S(n)$.

b. Montrer que pour tout $q \in \mathbb{R}^d$, (15) admet un unique point de minimum $M(q) \in \mathcal{K}$ et que la condition d'optimalité est

$$\forall M \in K, \quad \text{Tr}\,((H(q) + M(q))M) \geq \text{Tr}\,((H(q) + M(q))M(q)). \tag{16}$$

c. On se donne $M_0 \in \mathcal{K}$ et on note $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite d'éléments de $\mathcal{K}$ définie par la récurrence

$$M_{k+1} = \Pi_{\mathcal{K}}\,(M_k - \mu(H(q) + M_k)) \tag{17}$$

où $\Pi_{\mathcal{K}} : \mathcal{M}_S(n) \to \mathcal{K}$ est le projecteur orthogonal sur $\mathcal{K}$ (pour le produit scalaire de Frobenius) et où μ est un réel strictement positif. Montrer que pour $0 < \mu < 2$, la suite $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $M(q)$.

3) Pour mettre en œuvre l'algorithme itératif (17), il faut disposer d'une méthode efficace de calcul de $\Pi_{\mathcal{K}}(M)$ pour une matrice $M \in \mathcal{M}_S(n)$ quelconque. La construction d'une telle méthode est l'objet de la présente question.

a. Soit $y \in \mathbb{R}^n$. Vérifier que le problème d'optimisation

$$\min_{x \in X_{ad}} \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2 \tag{18}$$

où

$$X_{ad} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \text{ tels que } 0 \leq x_i \leq 1 \text{ pour tout } i = 1, \cdots, n \text{ et } \sum_{i=1}^{n} x_i = p \right\}$$

admet un unique point de minimum, puis montrer qu'on peut calculer facilement ce point de minimum en résolvant l'équation $f_y(\mu) = p$ où la fonction f_y est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_y(\mu) = \sum_{i=1}^{n} \max(0, \min(y_i - \mu, 1)).$$

b. Soit $\Delta(n)$ l'espace vectoriel des matrices diagonales de taille $n \times n$ et $\mathcal{P} = \Delta(n) \cap \mathcal{K}$. Montrer que

$$\mathcal{P} = \left\{ N = \mathrm{diag}(N_{11}, \cdots, N_{nn}), \quad 0 \leq N_{ii} \leq 1, \quad \sum_{i=1}^{n} N_{ii} = p \right\}.$$

c. On note $\Pi_{\Delta(n)} : \mathcal{M}_S(n) \to \Delta(n)$ le projecteur orthogonal (pour le produit scalaire de Frobenius) de $\mathcal{M}_S(n)$ sur $\Delta(n)$. Vérifier que $(\Pi_{\Delta(n)}(M))_{ii} = M_{ii}$ et $(\Pi_{\Delta(n)}(M))_{ij} = 0$ si $i \neq j$, puis montrer que si $M \in \mathcal{K}$, alors $\Pi_{\Delta(n)}(M) \in \mathcal{P}$.

d. Soit $N \in \Delta(n)$. Montrer que $\Pi_{\mathcal{K}}(N) \in \mathcal{P}$.

e. Proposer un algorithme simple permettant de calculer $\Pi_{\mathcal{K}}(N)$ pour $N \in \Delta(n)$.

f. Soit $U \in \mathcal{M}(n)$ une matrice orthogonale, i.e. telle que $UU^* = U^*U = I_n$. On pose

$$U^*\mathcal{K}U = \{U^*MU, \quad M \in \mathcal{K}\}.$$

Montrer que $U^*\mathcal{K}U = \mathcal{K}$.

g. En déduire que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_S(n)$ et toute matrice $U \in \mathcal{M}(n)$ orthogonale, on a $\Pi_{\mathcal{K}}(U^*MU) = U^*\Pi_{\mathcal{K}}(M)U$. Proposer une méthode de calcul de $\Pi_{\mathcal{K}}(M)$ pour $M \in \mathcal{M}_S(n)$.

4) Caractérisation du point de minimum de (15).

a. On pose $S(q) = H(q) + M(q)$ et on note $\epsilon_1(q) \leq \cdots \leq \epsilon_n(q)$ les valeurs propres de $S(q)$ comptées avec leur multiplicité et rangées par ordre croissant. Soit U une matrice orthogonale telle que $U^*S(q)U = D(q)$ où $D(q)$ est la matrice diagonale $\mathrm{diag}(\epsilon_1(q), \cdots, \epsilon_n(q))$. Soit enfin $N(q) = \Pi_{\Delta(n)}(U^*M(q)U)$. Montrer que $N(q) \in \mathcal{P}$ et que la condition (16) implique

$$\forall N \in \mathcal{P}, \quad \mathrm{Tr}\,(D(q)N) \geq \mathrm{Tr}\,(D(q)N(q)). \tag{19}$$

b. Montrer que $\mathcal{P} = \mathcal{K} \cap \Delta(n)$ est un polyèdre convexe (cf. page 241 du polycopié) et caractériser l'ensemble $\mathcal{P}_{\mathrm{ext}}$ des points extrémaux de $\mathcal{P}$. Quel est le cardinal de $\mathcal{P}_{\mathrm{ext}}$? Déduire de la connaissance de $\mathcal{P}_{\mathrm{per}}$ la valeur de $\mathrm{Tr}\,(D(q)N(q))$.

c. On suppose que $\epsilon_p(q) < \epsilon_{p+1}(q)$. Montrer que la fonction $N \mapsto \mathrm{Tr}\,(D(q)N)$ admet un unique point de minimum sur $\mathcal{P}$. En déduire l'expression de $N(q)$, puis de $M(q)$.