MAP 431 Contrôle classant 2010
Sujet proposé par F. Alouges et H. Ammari
Corrigé

1 Problème 1 (12 points)

Les quatre premières questions sont essentiellement des questions de cours.

1. On sait que $\phi_k \in H_0^1(\Omega)$ vérifie $-\Delta\phi_k = \lambda_k \phi_k$. En appliquant le Théorème 1, on en déduit que $\phi_k \in H^3(\Omega)$, puis par récurrence, que $\phi_k \in H^p(\Omega)$, $\forall p \geq 0$. Il en est de même de toutes ses dérivées (car si $u \in H^p$, alors toute dérivée α-ième est dans $H^{p-|\alpha|}$ pour tout multiindice α tel que $|\alpha| \leq p$). Or pour $p > d/2$ où d est la dimension de l'espace, $H^p(\Omega) \subset \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$, ce qui montre que toutes les dérivées de ϕ_k sont continues, c'est-à-dire que $\phi_k \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$. Enfin, par simple application de la formule de Green on a :

$$\lambda_k = \lambda_k \int_\Omega \phi_k^2 \, dx = -\int_\Omega \Delta\phi_k \phi_k \, dx = \int_\Omega |\nabla \phi_k|^2 \, dx.$$

2. La fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifie

$$\forall t > 0,\ g'(t) = \exp\left(-\int_0^t b(s)\, ds\right)(f'(t) - b(t)f(t)) \leq 0.$$

On en déduit que g est décroissante, ce qui implique que

$$\forall t > 0,\ g(t) \leq g(0) = f(0),$$

ce qui est l'inégalité demandée.

3.1 C'est classique. On pose $V = H_0^1(\Omega)$, et $L(v) = \int_\Omega f v \, dx$. La formulation variationnelle du problème s'écrit :
Trouver $u \in V$ tel que $\forall v \in V$, on ait $a(u,v) = L(v)$.
Elle admet une unique solution $\bar{u} \in H_0^1(\Omega)$ par application du théorème de Lax-Milgram (ou de Riesz ici).

3.2 – D'après le cours, la formulation variationnelle du problème s'écrit :
Trouver $u \in \mathcal{C}(0,T;H) \cap L^2(0,T;V)$ tel que $\forall v \in V$ on ait

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u(t,x)v(x)\, dx + a(u(t,\cdot), v(\cdot)) = \int_\Omega f(x)v(x)\, dx$$

où la dérivée en temps s'entend au sens faible, $V = H_0^1(\Omega)$ et $H = L^2(\Omega)$. On est alors dans les hypothèses du théorème 8.2.3 du poly et cette formulation variationnelle admet donc une unique solution telle que $u(0,x) = u_0(x)$ p.p..

– En soustrayant la formulation variationnelle de la question précédente, on trouve, en posant $w = u - \bar{u}$:

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega w(t,x)v(x)\, dx + a(w(t,\cdot), v(\cdot)) = 0,$$

ce qui, en posant $w(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} w_k(t)\phi_k(x)$ et en prenant $v = \phi_k$ donne directement :

$$\frac{dw_k}{dt} + \lambda_k w_k = 0, \text{ soit } w_k(t) = w_k(0)\exp(-\lambda_k t).$$

On a alors

$$\begin{aligned} ||w(t,\cdot)||_{L^2} &= \sum_k w_k(t)^2 = \sum_k w_k(0)^2 \exp(-2\lambda_k t) \\ &\leq \sum_k w_k(0)^2 \exp(-2\lambda_1 t) = \exp(-2\lambda_1 t) \sum_k w_k^2, \end{aligned}$$

ce qui signifie que

$$||w(t,\cdot)||_{L^2} \leq ||w(0,\cdot)||_{L^2} \exp(-\lambda_1 t)$$

ou encore que $u(t,\cdot)$ converge exponentiellement vite (dans L^2) vers $\bar{u}$.

4. On multiplie l'équation par $u(t,\cdot)$ et on intègre sur Ω. On suppose que $u \in \mathcal{C}^2([0,T]\times\bar{\Omega})$ (pour pouvoir en particulier utiliser la formule de Green) :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^2(t,x)\,dx + \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx = \mu(t)\int_\Omega u^2(t,x)\,dx.$$

En utilisant le fait que les solutions vérifient $||u(t,\cdot)||_{L^2} = 1\,\forall t$, on trouve (8). On décompose ensuite $u = \sum_k \alpha_k(t)\phi_k$ avec $\sum_k \alpha_k(t)^2 = ||u(t,\cdot)||_{L^2}^2 = 1$. Comme $\left(\frac{\phi_k}{\sqrt{\lambda_k}}\right)$ est une base hilbertienne de $H_0^1(\Omega)$ pour le produit scalaire $a(\cdot,\cdot)$, on a

$$\begin{aligned} \mu(t) &= a(u(t,\cdot),u(t,\cdot)) \\ &= a\left(\sum_k \alpha_k(t)\sqrt{\lambda_k}\frac{\phi_k}{\sqrt{\lambda_k}}, \sum_k \alpha_k(t)\sqrt{\lambda_k}\frac{\phi_k}{\sqrt{\lambda_k}}\right) \\ &= \sum_k \lambda_k \alpha_k(t)^2 \qquad (1.1) \\ &\geq \lambda_1 \sum_k \alpha_k(t)^2 \qquad (1.2) \\ &= \lambda_1 . \end{aligned}$$

Comme $\forall k \geq 2, \lambda_k > \lambda_1$, l'inégalité (1.2) est stricte sauf si $\alpha_k(t) = 0$ pour tout $k \geq 2$. On a alors $\alpha_1(t) = \pm 1$ ce qui signifie que $u(t,\cdot) = \pm u_1$.

Pour montrer que $\mu(t)$ décroit, on multiplie l'équation par $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ et on intègre sur Ω. On obtient alors

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla u|^2(t,x)\,dx = \frac{\mu(t)}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^2(t,x)\,dx = 0,$$

ce qui signifie que

$$\frac{d\mu}{dt} = -2\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx \leq 0.$$

5. Construction de solutions particulières.

5.1 L'existence et l'unicité d'une solution $u(t,x) = \sum_{k=1}^N \alpha_k(t)\phi_k(x)$ dans E_N sont equivalents à l'existence et l'unicité d'une solution au système différentiel sur les coefficients α_k

$$\frac{d}{dt}\alpha_k(t) + \lambda_k\alpha_k(t) = \lambda(u(t))\alpha_k(t)\ \forall k \in \{1,\cdots,N\},$$

avec $\lambda(u(t)) = \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx = \sum_{k=1}^N \lambda_k\alpha_k^2(t)$ d'après (1.1) et $\alpha_k(0) = \alpha_k^0$. En réécrivant le système sous la forme

$$\frac{d}{dt}\alpha_k(t) = \left(\sum_{i=1}^N \lambda_k\alpha_k^2 - \lambda_k\right)\alpha_k(t)\ \forall k \in \{1,\cdots,N\},$$

on a un système différentiel (en posant $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_N)$) du type

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{d\alpha}{dt} = F(\alpha)\,, \\ \alpha(0) = \alpha^0\,, \end{array}\right.$$

où $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence et l'unicité d'une solution maximale de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle de temps $[0, T^*[$. Le théorème des bouts stipule que si $T^* \neq +\infty$ alors $\lim_{t\to T^*} ||\alpha(t)|| = +\infty$. Mais le calcul suggéré dans l'énoncé montre que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\sum_{k=1}^N \alpha_k^2(t) - 1\right) = \left(\sum_k \lambda_k \alpha_k^2\right)\left(\sum_i \alpha_k^2 - 1\right),$$

ce qui donne $\left(\sum_{k=1}^N \alpha_k^2(t) - 1\right) = \left(\sum_{k=1}^N \alpha_k^2(0) - 1\right)\exp\left(2\int_0^t \lambda(u(s))\,ds\right) = 0$, car $\sum_{i=1}^N \alpha_i^2(0) = ||u^0||_{L^2}^2 = 1$. Ainsi $\sum_{i=1}^N \alpha_i^2(t) = ||u(t,\cdot)||_{L^2}^2 = 1$ et α reste borné. La solution est donc globale ($T^* = +\infty$). La solution construite est alors une combinaison linéaire à coefficients $\mathcal{C}^\infty$ de fonctions $\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$ (d'après la question 1.), c'est-à-dire que $u \in \mathcal{C}^\infty([0, +\infty[\times\bar{\Omega})$.

5.2 Comme $u \in \mathcal{C}^\infty([0, +\infty[\times\Omega)$, le même calcul que celui fait en question **4.** montre que $\lambda(u(t))$ décroit. Comme c'est une fonction positive, elle converge et on appelle λ^* sa limite lorsque t tend vers $+\infty$. On sait par ailleurs d'après la question **4.** que $\lambda(u(t)) \geq \lambda_1,\ \forall t > 0$, ce qui donne $\lambda^* \geq \lambda_1$. Enfin, l'équation sur α_1 donne

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\alpha_1(t) &= (\lambda(u(t)) - \lambda_1)\alpha_1(t) \\ &\geq (\lambda^* - \lambda_1)\alpha_1(t)\,, \end{aligned} \tag{1.3}$$

d'où l'on déduit (en utilisant le lemme de Gronwall) que $\alpha_1(t) \geq \alpha_1(0)\exp((\lambda^* - \lambda_1)t)$ qui tend vers $+\infty$ si $\lambda^* \neq \lambda_1$ (car $\alpha_1(0) > 0$). La contradiction vient du fait que α_1 reste borné pour tout temps (car $\sum_{i=1}^N \alpha_i^2 = 1$) et ainsi $\lambda^* = \lim_{t\to+\infty} \lambda(t) = \lambda_1$.
Enfin, en intégrant (1.3), on obtient

$$\alpha_1(t) = \alpha_1(0)\exp\left(\int_0^t \lambda(u(s)) - \lambda_1\,ds\right)$$

est une fonction croissante du temps (car $\lambda(u(s)) \geq \lambda_1,\ \forall s > 0$). Les autres composantes α_k pour $k > 1$ vérifient de même

$$\alpha_k(t) = \alpha_k(0)\exp\left(\int_0^t \lambda(u(s)) - \lambda_k\,ds\right)$$

qui tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$ en vertu de la simplicité de λ_1. Comme $\sum_{k=1}^N \alpha_k^2(t) = 1$ on en déduit que $\alpha_1(t)$ converge vers 1 lorsque t tend vers $+\infty$.

6. Construction de solutions dans le cas général.

6.1 On décompose u_0 dans la base hilbertienne ϕ_k : $u_0 = \sum_{k\geq 1} \alpha_k^0 \phi_k$, et l'on sait que la série converge dans H_0^1, et d'après l'hypothèse que $\alpha_1^0 > 0$. On pose alors $w^N = \sum_{k=1}^N \alpha_k^0 \phi_k$ et $u_0^N = \dfrac{w^N}{||w^N||_{L^2}}$ qui a un sens puisque le dénominateur n'est jamais nul (car $\int_\Omega w^N(x)u_1(x) \neq 0$). Ainsi, u_0^N satisfait les deux premières propriétés. La troisième provient du fait que $\int_\Omega u_0^N(x)u_1(x)\,dx = \frac{\alpha_1^0}{||w^N||_{L^2}} > 0$ et la quatrième de ce que $(w^N)_{N\geq 1}$ converge dans H_0^1 vers u_0 et donc aussi dans L^2. Ainsi $\lim_{N\to+\infty} ||w^N||_{L^2} = 1$ et par division de limites on a le résultat. Enfin, la dernière propriété demandée provient du fait que $\lambda(u_0^N) = \frac{\lambda(w^N)}{||w^N||_{L^2}^2}$ et que le numérateur et le dénominateur de cette fraction sont des termes généraux de deux suites convergentes.

6.2 En soustrayant les deux équations satisfaites par u^N et u^M, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(u^N - u^M) - \Delta(u^N - u^M) &= \lambda(u^N)u^N - \lambda(u^M)u^M \\ &= \frac{\lambda(u^N)+\lambda(u^M)}{2}(u^N - u^M) + (\lambda(u^N) - \lambda(u^M))\frac{u^N + u^M}{2}\,.\end{aligned}$$

On multiplie par $(u^N - u^M)$ et on intègre sur Ω. En remarquant que le dernier terme vérifie

$$\int_\Omega (\lambda(u^N) - \lambda(u^M))\frac{u^N+u^M}{2}(u^N - u^M) = (\lambda(u^N) - \lambda(u^M))(||u^N||_{L^2} - ||u^M||_{L^2}) = 0$$

(car pour tout temps t, $||u^N(t)||_{L^2} = ||u^M(t)||_{L^2} = 1$ d'après la question **5.1**), on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega (u^N - u^M)^2\,dx + \int_\Omega |\nabla(u^N - u^M)|^2\,dx = \frac{\lambda(u^N)+\lambda(u^M)}{2}\int_\Omega (u^N - u^M)^2\,dx\,. \tag{1.4}$$

On déduit de cette égalité l'inégalité (car $\lambda(u^N)$ et $\lambda(u^M)$ sont décroissantes) :

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega (u^N - u^M)^2\,dx \le C\int_\Omega (u^N - u^M)^2\,dx \tag{1.5}$$

avec $C = \lambda(u^N)(0) + \lambda(u^M)(0)$ par exemple. En utilisant le lemme de Gronwall, on obtient alors

$$\forall t \in [0,T],\ \int_\Omega (u^N(t,x) - u^M(t,x))^2\,dx \le \exp(CT)\int_\Omega (u^N(0,x) - u^M(0,x))^2\,dx$$

qui répond à la question avec $C_1 = \exp(CT)$. La deuxième estimation s'obtient en intégrant l'inégalité (1.4) sur $[0,T]$. On arrive à

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_\Omega (u^N(t,x) - u^M(t,x))^2\,dx - \frac{1}{2}\int_\Omega (u^N(0,x) - u^M(0,x))^2\,dx &+ \\ \int_0^T\int_\Omega |\nabla(u^N(t,x) - u^M(t,x))|^2\,dx\,dt &= \int_0^T \frac{\lambda_N + \lambda_M}{2}\int_\Omega (u^N - u^M)^2\,dx\,dt \\ &\le \frac{C_1CT}{2}\int_\Omega (u^N(0,x) - u^M(0,x))^2\,dx\end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$\int_0^T\int_\Omega |\nabla(u^N(t,x) - u^M(t,x))|^2\,dx\,dt \le \frac{C_1CT+1}{2}\int_\Omega (u^N(0,x) - u^M(0,x))^2\,dx\,.$$

En prenant $C_2 = \frac{C_1CT+1}{2}$ on a la réponse à la question.

6.3 Comme (u_0^N) converge dans L^2 d'après la quesiton **6.1**, elle est de Cauchy dans L^2. La question précédente montre précisément que la suite $(u^N(t,x))$ est de Cauchy dans $\mathcal{C}^0(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ qui est un espace complet. Elle converge donc dans cet espace, on appelle u^∞ sa limite.

En conséquence, on a convergence de $(u^N)_N$ vers u^∞ pour la norme de $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, ce qui signifie que $\left(||\nabla u^N(\cdot,x)||_{L^2}^2\right)$ converge dans $L^1(0,T)$ ou encore que $(\lambda(u^N))$ converge vers $\lambda(u^\infty)$ dans $L^1(0,T)$. La fonction λ^∞ est alors une fonction décroissante du temps comme limite d'une suite de fonctions décroissantes en temps. De la même façon, la convergence dans $\mathcal{C}^0(0,T;L^2(\Omega))$ donne

$$\sup_{t\in[0,T]} ||u^N(t,\cdot) - u^\infty(\cdot)||_{L^2} \to 0 \text{ quand } N \to +\infty$$

et comme $||u^N(t,\cdot)||_{L^2} = 1,\ \forall t$, on a bien $||u^\infty(t,\cdot)||_{L^2} = 1$, $\forall 0 \le t \le T$.

6.4 On sait que pour tout $N \geq 1$, u^N vérifie

$$\left[\begin{array}{l} \forall \phi \in H_0^1(\Omega),\ \forall t \in [0,T], \\ \displaystyle\int_\Omega u^N(t,x)\phi(x)\,dx + \int_0^t a(u^N(s),\phi)\,ds = \int_\Omega u^N(0,x)\phi(x)\,dx + \int_0^t \lambda(u^N(s)) \int_\Omega u^N(s,x)\phi(x)\,dx\,ds \\ u^N(0,x) = u_0^N(x)\,. \end{array}\right. \tag{1.6}$$

pour tout $\phi \in H_0^1(\Omega)$. On va passer à la limite dans chacun des termes. Les deux premiers termes sont faciles. $(u^N)_N$ converge vers u^∞ dans $\mathcal{C}^0(0,T;L^2(\Omega))$ on a donc

$$\forall 0 \leq t \leq T,\ \int_\Omega u^N(t,x)\phi(x)\,dx \to \int_\Omega u^\infty(t,x)\phi(x)\,dx\,.$$

En particulier, pour la donnée initiale, on a $u^\infty(0) = u_0$. De même $(u^N)_N$ converge vers u^∞ dans $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ implique que

$$\forall T \geq t \geq 0,\ \int_0^t a(u^N(s),\phi)\,ds \to \int_0^t a(u^\infty(s),\phi)\,ds\,.$$

Il reste à faire passer le dernier terme à la limite. Mais

$$\lambda(u^N(\cdot)) \to \lambda(u^\infty(\cdot)) \text{ dans } L^1(0,T)$$

et

$$\int_\Omega u^N(\cdot,x)\phi(x)\,dx \to \int_\Omega u^\infty(\cdot,x)\phi(x)\,dx \text{ dans } \mathcal{C}^0(0,T)$$

donnent que

$$\lambda(u^N(\cdot))\int_\Omega u^N(\cdot,x)\phi(x)\,dx \to \lambda(u^\infty(\cdot))\int_\Omega u^\infty(\cdot,x)\phi(x)\,dx \text{ dans } L^1(0,T)$$

et le résultat.

2 Problème 2 (8 points)

1. On sait, puisque $x \in X$ et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} \left|\int_0^t \tau x(\tau)\frac{dx}{dt}(\tau)\,d\tau\right| &\leq ||\tau x(\tau)||_{L^2(0,t)}||\frac{dx}{dt}||_{L^2(0,t)} \\ &\leq ||\tau x(\tau)||_{L^2(\mathbb{R}^+)}||\frac{dx}{dt}||_{L^2(\mathbb{R}^+)} \end{aligned}$$

que $tx(t)\frac{dx}{dt}(t) \in L^1(\mathbb{R}^+)$. Mais par intégration par parties

$$\int_0^t \tau x(\tau)\frac{dx}{dt}(\tau)\,d\tau = -\int_0^t \tau x(\tau)\frac{dx}{dt}(\tau)\,d\tau - \int_0^t x^2(\tau)\,d\tau + [\tau x^2(\tau)]_0^t\,,$$

ce qui donne

$$tx^2(t) = 2\int_0^t \tau x(\tau)\frac{dx}{dt}(\tau)\,d\tau + \int_0^t x^2(\tau)\,d\tau\,. \tag{2.7}$$

Le membre de droite converge lorsque t tend vers $+\infty$ et ainsi $tx^2(t)$ a une limite finie lorsque t tend vers $+\infty$. Cette limite ne peut qu'être nulle puisque par hypothèse ($x \in X$), $t^2x^2(t) \in L^1(\mathbb{R}^+)$.

2. Comme $tx(t)$ et $\frac{dx}{dt}$ sont tous les deux dans $L^2(\mathbb{R}^+)$ par hypothèse, l'intégrale proposée est finie. On a alors

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt &= \int_0^{+\infty}\left(\frac{dx}{dt}+tx\right)^2 dt - 2\int_0^{+\infty} tx\frac{dx}{dt}\,dt - \int_0^{+\infty} t^2x^2(t)\,dt\\ &= \int_0^{+\infty}\left(\frac{dx}{dt}+tx\right)^2 dt + \int_0^{+\infty}(1-t^2)x^2(t)\,dt\\ &\geq \int_0^{+\infty}(1-t^2)x^2(t)\,dt\,.\end{aligned}$$

(On a utilisé (2.7) en faisant tendre t vers $+\infty$.)

3. Soit $a>0$ et $y\in X$. On pose $x(t)=y\left(\frac{t}{a}\right)$ dans l'inégalité précédente. On a alors $\frac{dx}{dt}(t)=\frac{1}{a}\frac{dy}{dt}\left(\frac{t}{a}\right)$. On fait enfin le changement de variable $\tau=t/a$. On obtient

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2(t)\,dt - \int_0^{+\infty}(1-t^2)x^2(t)\,dt &= \int_0^{+\infty}\frac{1}{a^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\left(\frac{t}{a}\right)\,dt - \int_0^{+\infty}(1-t^2)y^2\left(\frac{t}{a}\right)\,dt\\ &= \int_0^{+\infty}\frac{1}{a}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2(\tau)\;d\tau - \int_0^{+\infty}(1-(a\tau)^2)y^2\,(\tau)\;ad\tau\\ &\geq 0\end{aligned}$$

d'après (11). Cette dernière inégalité se réécrit en

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2(\tau)\;d\tau - a^2\int_0^{+\infty}y^2\,(\tau)\;d\tau + a^4\int_0^{+\infty}\tau^2y^2\,(\tau)\;d\tau\geq 0 \tag{2.8}$$

4. L'expression (2.8) est un polytnôme du second degré en a^2 qui est toujours positif. Le discriminant Δ est donc négatif ou nul. Or

$$\Delta=\left(\int_0^{+\infty}y^2\,(\tau)\;d\tau\right)^2 - 4\left(\int_0^{+\infty}\tau^2y^2\,(\tau)\;d\tau\right)\left(\int_0^{+\infty}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2(\tau)\;d\tau\right)\leq 0.$$

Ce qui donne(12) avec $C=2$.

5. On a

$$\mathcal{L}(x+\varepsilon h,\lambda)=\int_0^{+\infty}\left(\frac{d(x+\varepsilon h)}{dt}\right)^2 dt + \lambda\left[\int_0^{+\infty}(t^2-1)(x+\varepsilon h)^2(t)\,dt+1\right]$$

d'où

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\mathcal{L}(x+\varepsilon h,\lambda)-\mathcal{L}(x,\lambda)}{\varepsilon}=2\int_0^{+\infty}\frac{dx}{dt}\frac{dh}{dt}\,dt+2\lambda\int_0^{+\infty}(t^2-1)x(t)h(t)\,dt$$

6. Si x est une solution de (13,14), on sait d'après le cours (voir Remarque 10.2.10) que x vérifie

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v}(x,\lambda)=0\,,$$

c'est-à-dire, d'après la question précédente

$$\forall h\in\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^+),\;\int_0^{+\infty}\frac{dx}{dt}\frac{dh}{dt}\,dt+\lambda\int_0^{+\infty}(t^2-1)x(t)h(t)\,dt=0\,. \tag{2.9}$$

En prenant h telle que $h(0)=0$ et en intégrant le premier terme par parties, on obtient

$$\forall h\in\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^+)\text{ tel que }h(0)=0,\;\int_0^{+\infty}\left(-\frac{d^2x}{dt^2}+\lambda(t^2-1)x(t)\right)h(t)\,dt=0\,,$$

ce qui signifie que x vérifie (15). Enfin, en reprenant l'intégration par parties de (2.9) mais en ne supposant plus que $h(0) = 0$, on obtient

$$\forall h \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^+),\ -\frac{dx}{dt}(0)h(0) + \int_0^{+\infty} \left(-\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda(t^2-1)x(t)\right) h(t)\,dt = -\frac{dx}{dt}(0)h(0) = 0\,,$$

puisque x vérifie (15). La valeur de $h(0)$ pouvant être arbitraire, on obtient (16).

7. On a

$$\begin{aligned}\frac{d^2x_0}{dt^2} &= \frac{2}{\pi^{1/4}}\left((-1+t^2)\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\right)\\ &= (t^2-1)x_0\,,\end{aligned}$$

et ainsi x_0 vérifie (15) pour $\lambda = 1$. De plus, x_0 est paire et vérifie donc (16). Enfin,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}(t^2-1)x_0^2(t)\,dt &= \frac{4}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\left(t^2\exp(-t^2)-\exp(-t^2)\right)\,dt\\ &= \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{4}-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)\\ &= -1\,.\end{aligned}$$

8. En utilisant les donnéees de l'énoncé, on a

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} x_0^2(t)\,dt &= \frac{4}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\exp(-t^2)\,dt = 2\\ \int_0^{+\infty} t^2x_0^2(t)\,dt &= \frac{4}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}t^2\exp(-t^2)\,dt = 1\,,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}(\frac{dx_0}{dt})^2(t)\,dt &= -\int_0^{+\infty}\frac{d^2x_0}{dt^2}(t)x_0(t)\,dt\\ &= \int_0^{+\infty}(1-t^2)x_0(t)x_0(t)\,dt\\ &= 1\end{aligned}$$

car x_0 vérifie (15) avec $\lambda = 1$. En utilisant ces valeurs, on trouve que x_0 vérifie (12) avec $C = 2$. Ainsi, $C = 2$ est la meilleure constante possible pour (12).