École Polytechnique. Promotion 2011.
Analyse Numérique et Optimisation (MAP 431)
Corrigé du contrôle HC du 22 Avril 2013.

Exercice 1 (Différences finies, 8 points)

1. On considère une solution régulière $u(t,x)$ du problème (1). L'erreur de consistance au point (t_n, x_j) s'écrit

$$\varepsilon_j^n := \frac{u(t_{n+1},x_j)-u(t_n,x_j)}{\Delta t}$$
$$+\frac{1}{\Delta t}\left[\frac{-u(t_{n+1},x_{j+1})+2\,u(t_{n+1},x_j)-u(t_{n+1},x_{j-1})}{(\Delta x)^2}-\frac{-u(t_n,x_{j+1})+2\,u(t_n,x_j)-u(t_n,x_{j-1})}{(\Delta x)^2}\right]$$
$$+\frac{u(t_{n+1},x_{j+1})-u(t_{n+1},x_{j-1})}{2\Delta x}$$

Comme u est supposée régulière, on peut effectuer des développement limités. On calcule pour le premier terme,

$$\frac{u(t_{n+1},x_j)-u(t_n,x_j)}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial t}(t_n,x_j)+O(\Delta t).$$

Pour le second terme, on calcule pour $k=0$ ou $k=1$

$$a(t_{n+k},x_j) := \frac{-u(t_{n+k},x_{j+1})+2\,u(t_{n+k},x_j)-u(t_{n+k},x_{j-1})}{(\Delta x)^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_{n+k},x_j)+O(\Delta x^2),$$

d'où

$$\frac{1}{\Delta t}[a(t_{n+1},x_j)-a(t_n,x_j)] = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_n,x_j)+O(\Delta t)+O(\Delta x^2/\Delta t)$$

Comme on suppose que $\Delta x/\Delta t = c$ esf fixé, on a en fait

$$\frac{1}{\Delta t}[a(t_{n+1},x_j)-a(t_n,x_j)] = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_n,x_j)+O(\Delta x+\Delta t).$$

Pour le dernier terme, on calcule

$$\frac{u(t_{n+1},x_{j+1})-u(t_{n+1},x_{j-1})}{2\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}(t_{n+1},x_j)+O(\Delta x) = \frac{\partial u}{\partial x}(t_n,x_j)+O(\Delta x+\Delta t).$$

Sommant ces développements et tenant compte de $\left[\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial x}\right](t_n,x_j)=0$ on obtient

$$\varepsilon_j^n := O(\Delta x+\Delta t).$$

Le schéma est donc bien d'ordre 1 en temps et en espace.

Remarque 1 L'hypothèse imposant que le rapport $\Delta x/\Delta t$ soit fixé n'est là que pour simplifier le développement du terme $\frac{1}{\Delta t}[a(t_{n+1},x_j)-a(t_n,x_j)]$. Sans cette hypothèse, on a toujours $\varepsilon_j^n = O(\Delta x + \Delta t)$. En effet, en utilisant un développement de Taylor avec reste intégral, on a

$$a(t_{n+k},x_j) \;=\; \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_{n+k},x_j) + \frac{\Delta x^2}{6}\int_{-1}^{1}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_{n+k},x_j+s)(1-|s|)^3\,ds,$$

qui conduit à

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Delta t}[a(t_{n+1},x_j)-a(t_n,x_j)] \\
&\quad = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_n,x_j) + O(\Delta t) + \frac{\Delta x^2}{6}\int_{-1}^{1}\frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_{n+1},x_j+s) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_n,x_j+s)}{\Delta t}(1-|s|)^3\,ds \\
&\quad = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_n,x_j) + O(\Delta t + \Delta x^2).
\end{aligned}$$

2. On développe la solution du schéma sous la forme

$$u_j^n \;=\; \sum_{k=0}^{N-1} \hat{u}_k^n e_j^k,$$

où $e_j^k := \left(1/\sqrt{N}\right)\exp(2i\pi k x_j)$. On peut faire cette décomposition car $(e^0,\cdots,e^{N-1})$ forme une base (orthonormée) de $\mathbf{R}^N$. En utilisant la relation

$$e_{j+l}^k = \exp(2i\pi k l\Delta x)e_j^k\ ,$$

on voit que le schéma est équivalent à

$$B_k\hat{u}_k^{n+1} + C_k\hat{u}_k^n = 0, \qquad \text{pour } k = 0,\cdots,N-1 \text{ et } n \geq 0,$$

avec

$$\begin{aligned}
B_k \;&:=\; \frac{1}{\Delta t} + \frac{-e^{2i\pi k\Delta x} + 2 - e^{2i\pi k\Delta x}}{\Delta t(\Delta x)^2} + \frac{e^{2i\pi k\Delta x} - e^{-2i\pi k\Delta x}}{2\Delta x} \\
&= \frac{1}{\Delta t}\left(1 + \frac{4\sin^2(k\pi\Delta x)}{(\Delta x)^2}\right) + i\frac{\sin 2\pi k\Delta x}{\Delta x}
\end{aligned}$$

$$C_k \;:=\; -\frac{1}{\Delta t} - \frac{-e^{2i\pi k\Delta x} + 2 - e^{2i\pi k\Delta x}}{\Delta t(\Delta x)^2} \;=\; -\frac{1}{\Delta t}\left(1 + \frac{4\sin^2(k\pi\Delta x)}{(\Delta x)^2}\right) \;=\; -\Re(B_k).$$

Le coefficient d'amplification à la fréquence $2\pi k$ est alors $A_k = -C_k/B_k$, soit

$$A_k \;=\; \left[1 + i\frac{\Im(B_k)}{\Re(B_k)}\right]^{-1}.$$

On en déduit $|A_k| \leq 1$ pour $k = 0,\cdots,N-1$ et même $|A_k| < 1$ si $k \neq 0$. Le schéma est donc stable pour la norme L^2.

3. Par Théorème de Lax, le schéma (linéaire) est convergent d'ordre 1 en temps et 1 en espace pour la norme L^2 définie par

$$\|(v_j)_{j=0,\cdots,N-1}\|_{L^2}^2 \;:=\; \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}|v_j|^2.$$

4. On a, avec les notations de la question 2, $E^n = (1/N)\sum_{k=0}^{N-1}|\hat{u}_k^n|^2$. Comme, d'après la question 2, on a

$$\hat{u}_k^{n+1} = A_k\hat{u}_k^n = \cdots = (A_k)^{n+1}\hat{u}_k^0 \quad \text{pour } n \geq 0 \text{ et } k \in \{0, \cdots, N-1\},$$

on a $|\hat{u}_k^{n+1}| \leq |\hat{u}_k^0|$ avec inégalité stricte dès que $\hat{u}_k^0 \neq 0$ et $k \in \{1, \cdots, N-1\}$. On en déduit l'estimation

$$E^{n+1} \;=\; \frac{1}{N}\sum |A_k|^2|\hat{u}_k^n|^2 \;\leq\; \frac{1}{N}\sum |\hat{u}_k^0|^2 \;=\; E^0,$$

avec une inégalité stricte dès que $\hat{u}_k^0 \neq 0$ pour au moins un k de $\{1, \cdots, N-1\}$. L'énergie est donc décroissante et est conservée seulement si $\hat{u}_k^0 = 0$ pour $k \in \{1, \cdots, N-1\}$ c'est-à-dire si $u_j^0 = \lambda$ ne dépend pas de j. Dans ce cas $u_j^n = u_j^0 = \lambda$ pour tout j, n.

Le schéma est de type dissipatif.

Remarque 2 Pour voir que $E(t)$ est conservée dans le cas continu, il faut considérer la décomposition en série de Fourier de la solution exacte

$$u(t,x) \;=\; \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(t)\; \exp(2i\pi kx).$$

En substituant ce développement formellement dans (1) et en identifiant, on obtient

$$(1+4\pi^2k^2)c_k'(t) + 2i\pi k c_k(t) \;=\; 0, \qquad \forall\, k \in \mathbf{Z},\ \forall\, t > 0.$$

On résoud facilement chacune de ces equations différentielles. En tenant compte de la condition initiale, on a

$$c_k(t) \;=\; c_k^0 \exp(\lambda_k i t)$$

où les c_k^0 sont les coefficients de Fourier de u_0 et λ_k est le réel

$$\lambda_k \;:=\; 2k\pi/(1+4\pi^2k^2).$$

En particulier $|c_k(t)| = |c_k^0|$ pour tout $t \geq 0$. On a bien pour $t \geq 0$,

$$E(t) \;=\; \sum_{k\in\mathbf{Z}} |c_k(t)|^2 \;=\; \sum_{k\in\mathbf{Z}} |c_k^0|^2 \;=\; E(0).$$

Nous laissons le lecteur vérifier que si u^0 est de régularité H^1 sur tout intervalle borné de $\mathbf{R}$, alors $u \in C\left(\mathbf{R}_+, H^1(0,1)\right)$ et u est solution de (1) au sens faible.

Exercice 2 (Formulation variationnelle, 12 points)

5. On applique le Théorème de Lax-Milgram dans le Hilbert $H^1(\Omega_a)$ aux formes bilinéaires et linéaires définies pour $v, w \in H^1(\Omega_a)$ par :

$$a(v,w) \;:=\; \int_{\Omega_a} \nabla v \cdot \nabla w \;+ \int_\Gamma vw, \qquad L(w) \;:=\; \int_{\Omega_a} fw \;+ \int_\Gamma g_a w\;.$$

Notons tout d'abord que $\Gamma = \partial\Omega_a$ et que Ω est un ouvert borné régulier. Les intégrales $\int_\Gamma vw$ et $\int_\Gamma g_a w$ sont bien définies car d'une part $g_a \in L^2(\Gamma)$ par hypothèse et d'autre part, les traces de v et w sont bien définies dans $L^2(\Gamma)$.

Vérifions les hypothèses du Théorème de Lax-Milgram.

- $H^1(\Omega_a)$ est un Hilbert pour le produit scalaire

$$(v,w)_{H^1(\Omega_a)} = \int_{\Omega_a} \nabla v \cdot \nabla w \; + \int_{\Omega_a} vw.$$

  C'est un résultat du cours.
- a est bilinéaire et continue sur $H^1(\Omega_a)$. Le caractère bilinéaire est évident. Pour la continuité, on considère $v, w \in H^1(\Omega_a)$. On utilise Cauchy-Schwarz pour déduire

$$a(v,w) \;\le\; \|\nabla v\|_{L^2(\Omega_a)} \, \|\nabla w\|_{L^2(\Omega_a)} + \|v\|_{L^2(\Gamma)}\|w\|_{L^2(\Gamma)}.$$

  Par Théorème de trace, il exists $C_T \ge 0$ telle que $\|h\|_{L^2(\Gamma)} \le C_T\|h\|_{H^1(\Omega_a)}$ pour tout $h \in H^1(\Omega_a)$. On en déduit

$$a(v,w) \;\le\; (1 + C_T^2)\|v\|_{H^1(\Omega_a)}\|w\|_{H^1(\Omega_a)},$$

  ce qui établit que a est continue sur $H^1(\Omega_a) \times H^1(\Omega_a)$.
- L est linéaire et continue sur $H^1(\Omega_a)$. La linéarité est évidente. La continuité se vérifie en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le Théorème de trace. On a

$$L(w) \;\le\; (\|f\|_{L^2(\Omega_a)} + C_T\|g_a\|_{L^2(\Gamma)})\|w\|_{H^1(\Omega_a)} \qquad \forall\, w \in H^1(\Omega_a).$$

- La forme bilinéaire a est coercive sur $H^1(\Omega_a)$. Em effet, comme Γ est un ouvert non vide du bord de Ω_a et que Ω_a est connexe, il existe une constante $C_P \ge 0$ telle que

$$\|v\|^2_{L^2(\Omega_a)} \;\le\; C_P^2 \; a(v,v) \qquad \forall\, v \in H^1(\Omega_a). \tag{s1}$$

  (c'est une inégalité de Poincaré vue en exercice). Comme on a de manière évidente

$$a(v,v) \;\ge\; \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega_a)} \qquad \forall\, v \in H^1(\Omega_a),$$

  on en déduit

$$a(v,v) \;\ge\; \alpha\|v\|^2_{H^1(\Omega_a)} \qquad \forall\, v \in H^1(\Omega_a),$$

  avec comme constante $\alpha = (1/2)\min(1, C_P^{-2}) \;>\; 0$. Ceci montre que a est coercive.

Le Théorème de Lax-Milgram nous donne l'existence d'une unique solution $v_a \in H^1(\Omega_a)$ du problème (a). De plus l'application $(f, g_a) \in L^2(\Omega_a) \times L^2(\Gamma) \longmapsto v_a \in H^1(\Omega_a)$ est linéaire et continue.

Remarque 3 *Preuve de* (s1) *:* Les élèves peuvent admettre l'inégalité de Poincaré (s1) qu'ils ont vu en exercice. Pour la démontrer, on peut raisonner par contradiction. Si elle était fausse, il existerait une suite $(v_n) \subset H^1(\Omega_a)$ telle que pour $n \ge 1$,

$$a(v_n, v_n) \;=\; \int_{\Omega_a} |\nabla v_n|^2 \;+ \int_\Gamma |v_n|^2 \;<\; \frac{1}{n}\int_{\Omega_a} |v_n|^2.$$

Quitte à remplacer v_n par $(1/\|v_n\|^2_{L^2})v_n$, on peut supposer que $\|v_n\|_{L^2} = 1$. Le membre de droite est alors égal à $1/n$ dans l'inégalité ci-dessus. On en déduit que (v_n) est bornée dans $L^2(\Omega_a)$, que (∇v_n) converge vers 0 dans $L^2(\Omega_a)$ et que la trace $v_{n|\Gamma}$ converge vers 0 dans $L^2(\Gamma)$. En particulier, (v_n) est bornée dans $H^1(\Omega_a)$. Le Théorème de Rellich s'applique et quitte à extraire une sous suite, la suite (v_n) converge vers une limite v dans $L^2(\Omega_a)$. En passant à la limite dans $\|v_n\|_{L^2(\Omega_a)} = 1$, on déduit $\|v\|_{L^2(\Omega_a)} = 1$. D'autre part, vomme (∇v_n) converge vers 0 dans $L^2(\Omega_a)$, la suite (v_n) est de Cauchy dans $H^1(\Omega_a)$, elle converge donc vers une limite $v' \in H^1(\Omega_a)$ qui satisfait $\nabla v' \equiv 0$. Comme Ω_a est connexe, v' est constante. Par continuité de l'application trace, on a $v'_{|\Gamma} \equiv 0$ et donc $v' \equiv 0$. Finalement, par unicité de la limite dans $L^2(\Omega_a)$, on a $v = v' \equiv 0$. Ceci contredit $\|v\|_{L^2(\Omega_a)} = 1$.

6. Supposons que la solution v_a de (a) soit un élément de $H^2(\Omega_a)$. Pour tout $w \in C^\infty(\bar{\Omega})$, le champs de vecteur $\Phi = (w\nabla v_a)$ est alors un élément de $H^1(\Omega_a)$ et par Théorème de Stokes,

$$\int_{\Omega_a} \operatorname{div} \Phi \;=\; \int_\Gamma \Phi \cdot n_a \,,$$

soit

$$\int_{\Omega_a} \nabla v_a \cdot \nabla w \;+\; \int_{\Omega_a} \Delta v_a w \;=\; \int_\Gamma \frac{\partial v_a}{\partial n_a} w \,.$$

En injectant cette identité dans la formulation variationelle, on obtient

$$\int_{\Omega_a} (-\Delta v_a - f) w \;+\; \int_\Gamma \left(\frac{\partial v_a}{\partial n_a} + v_a - g_a \right) w \;=\; 0 \qquad \forall\, w \in C^\infty(\bar{\Omega}). \tag{s2}$$

En particulier, en choisissant d'abord des fonctions test $w \in C_c^\infty(\Omega_a)$, on a

$$(-\Delta v_a - f, w)_{L^2(\Omega_a)} \;=\; \int_{\Omega_a} (-\Delta v_a - f) w \;=\; 0 \qquad \forall\, w \in C_c^\infty(\Omega_a).$$

Par densité de $C_c^\infty(\Omega_a)$ dans $L^2(\Omega_a)$, on en déduit l'identité

$$-\Delta v_a \;=\; f \qquad \text{dans } \; L^2(\Omega_a). \tag{s3}$$

Par conséquent, la première intégrale est nulle dans (s2). On a alors

$$\int_\Gamma \left(\frac{\partial v_a}{\partial n_a} + v_a - g_a \right) w \;=\; 0 \qquad \forall\, w \in C^\infty(\bar{\Omega}).$$

Par densité des traces de fonctions $C^\infty(\bar{\Omega})$ dans $L^2(\partial\Omega_a)$, on en déduit qu'au sens des traces,

$$\frac{\partial v_a}{\partial n_a} + v_a \;=\; g_a \qquad \text{sur } \; \Gamma. \tag{s4}$$

Finalement, v_a est solution du problème aux limites défini par (s3) et (s4).

Dans le cas de la formulation variationnelle (b), le problème aux limites correspondant est

$$-\Delta v_b \;=\; f \quad \text{dans } \; \Omega_b, \qquad \frac{\partial v_b}{\partial n_b} + v_b \;=\; g_b \quad \text{sur } \; \Gamma, \qquad \frac{\partial v_b}{\partial n} \;=\; 0 \quad \text{sur } \; \partial\Omega.$$

7. Testons la formulation variationnelle (a) avec $v_a = u$ et $g_a = -\dfrac{\partial u}{\partial n_b} + u$, on a $\forall\, w \in H^1(\Omega_a)$,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_a} (\nabla u \cdot \nabla w - fw) + \int_\Gamma (u - g_a) w \;&=\; \int_{\Omega_a} (\nabla u \cdot \nabla w - fw) + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n_b} w \\ &\overset{\text{ipp}}{=} \int_{\Omega_a} (-\Delta u - f) w + \int_\Gamma \left(\frac{\partial u}{\partial n_a} + \frac{\partial u}{\partial n_b} \right) w \,. \end{aligned}$$

Comme u satisfait $-\Delta u - f \equiv 0$ dans Ω_a, la première intégrale est nulle. Pour la seconde, on a $n_a = -n_b$ et donc $\frac{\partial u}{\partial n_a} + \frac{\partial u}{\partial n_b} = 0$. Finalement, on a bien,

$$\int_{\Omega_a} (\nabla u \cdot \nabla w - fw) + \int_\Gamma (u - g_a) w \;=\; 0 \qquad \forall\, w \in H^1(\Omega_a).$$

Testons maintenant la formulation variationnelle (b) avec $v_b = u$ et $g_b = -\frac{\partial u}{\partial n_a} + u$, on a $\forall\, w \in H$,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_b}(\nabla u \cdot \nabla w - fw) + \int_\Gamma (u - g_b)w \;&=\; \int_{\Omega_b}(\nabla u \cdot \nabla w - fw) + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n_a} w \\ &\overset{\text{ipp}}{=}\; \int_{\Omega_b}(-\Delta u - f)w + \int_\Gamma \left(\frac{\partial u}{\partial n_b} + \frac{\partial u}{\partial n_a}\right) w + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} w\,.\end{aligned}$$

La première et la seconde intégrale sont nulles pour les mêmes raisons que plus haut et la troisième est nulle car $w \in H$ a une trace nulle sur $\partial\Omega$. On a bien,

$$\int_{\Omega_b}(\nabla u \cdot \nabla w - fw) + \int_\Gamma (u - g_b)w \;=\; 0 \qquad \forall\, w \in H.$$

Par linéarité, on en déduit que l'erreur au rang $k+1$ satisfait les formulations variationnelles :

a$_k$)

$$\int_{\Omega_a} \nabla e_a^{k+1} \cdot \nabla w \;+ \int_\Gamma (e_a^{k+1} - h_a^k) w \;=\; 0 \qquad \forall\, w \in H^1(\Omega_a),$$

b$_k$)

$$\int_{\Omega_b} \nabla e_b^{k+1} \cdot \nabla w \;+ \int_\Gamma (e_b^{k+1} - h_b^k) w \;=\; 0 \qquad \forall\, w \in H.$$

Les problèmes aux limites correspondants sont pour $k \geq 0$,

$$-\Delta e_a^{k+1} \;=\; 0 \;\text{ dans }\; \Omega_a, \qquad \frac{\partial e_a^{k+1}}{\partial n_a} + e_a^{k+1} \;=\; h_a^k \;\text{ sur }\; \Gamma.$$

$$-\Delta e_b^{k+1} \;=\; 0 \;\text{ dans }\; \Omega_b, \qquad \frac{\partial e_b^{k+1}}{\partial n_b} + e_b^{k+1} \;=\; h_b^k \;\text{ sur }\; \Gamma, \qquad e_b^{k+1} \;=\; 0 \;\text{ sur }\; \partial\Omega.$$

8. Fixons $k \geq 0$. D'après la condition au bord

$$\frac{\partial e_a^{k+1}}{\partial n_a} + e_a^{k+1} \;=\; h_a^k \;\text{ sur }\; \Gamma, \tag{s5}$$

on a $e_a^{k+1} - h_a^k \;=\; -\frac{\partial e_a^{k+1}}{\partial n_a}$ sur Γ. En injectant cette identité dans la formulation variationnelle (a$_k$), on obtient

$$\int_{\Omega_a} \nabla e_a^{k+1} \cdot \nabla w \;- \int_\Gamma \frac{\partial e_a^{k+1}}{\partial n_a} w \;=\; 0 \qquad \forall\, w \in H^1(\Omega_a),$$

Faisons $w = e_a^{k+1}$,

$$\int_{\Omega_a} |\nabla e_a^{k+1}|^2 - \int_\Gamma \frac{\partial e_a^{k+1}}{\partial n_a} e_a^{k+1} \;=\; 0. \tag{s6}$$

En utilisant l'indication, on calcule,

$$-\frac{\partial e_a^{k+1}}{\partial n_a} e_a^{k+1} \;=\; \frac{1}{4}\left|-\frac{\partial e_a^{k+1}}{\partial n_a} + e_a^{k+1}\right|^2 - \frac{1}{4}\left|\frac{\partial e_a^{k+1}}{\partial n_a} + e_a^{k+1}\right|^2 .$$

En utilisant (s5) et la définition $h_b^{k+1} = -\frac{\partial e_a^{k+1}}{\partial n_a} + e_a^{k+1}$ sur Γ, on a

$$-\frac{\partial e_a^{k+1}}{\partial n_a} e_a^{k+1} \;=\; \frac{1}{4}\left|h_b^{k+1}\right|^2 - \frac{1}{4}\left|h_a^k\right|^2 .$$

En substituant cette identité dans (s6), on obtient pour $k \geq 0$,

$$\int_{\Omega_a} |\nabla e_a^{k+1}|^2 + \frac{1}{4}\int_\Gamma \left|h_b^{k+1}\right|^2 \;=\; \frac{1}{4}\int_\Gamma \left|h_a^k\right|^2, \tag{s7}$$

qui est le résultat souhaité.

9. De manière symétrique, on a pour $k \geq 0$,

$$\int_{\Omega_b} |\nabla e_b^{k+1}|^2 + \frac{1}{4}\int_\Gamma \left|h_a^{k+1}\right|^2 \;=\; \frac{1}{4}\int_\Gamma \left|h_b^k\right|^2, \tag{s8}$$

Sommant (s7) et (s8), puis sommant sur $k \in \{0, \cdots, K\}$, on obtient par télescopage,

$$\sum_{k=1}^{K+1}\left(\int_{\Omega_a} |\nabla e_a^k|^2 + \int_{\Omega_b} |\nabla e_b^k|^2\right) + \frac{1}{4}\left[\int_\Gamma \left|h_b^{K+1}\right|^2 + \left|h_a^{K+1}\right|^2\right] \;=\; \frac{1}{4}\left[\int_\Gamma \left|h_b^0\right|^2 + \left|h_a^0\right|^2\right] \;=:\; C.$$

Faisant tendre K vers $+\infty$, on obtient,

$$\sum_{k\geq 1}\left(\int_{\Omega_a} |\nabla e_a^k|^2 + \int_{\Omega_b} |\nabla e_b^k|^2\right) \;\leq\; C.$$

Par convergence de la série on en déduit

$$\int_{\Omega_a} |\nabla e_a^k|^2 \overset{k\uparrow\infty}{\longrightarrow} 0, \qquad \int_{\Omega_b} |\nabla e_b^k|^2 \overset{k\uparrow\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{s8}$$

Que peut-on en conclure ?

- Tout d'abord dans Ω_b, on a l'inégalité de Poincaré

  $$\int_{\Omega_b} |w|^2 \;\leq\; C_P^2 \int_{\Omega_b} |\nabla w|^2 \qquad \forall\, w \in H.$$

  On peut donc conclure que (e_b^k) converge vers 0 dans $H^1(\Omega_b)$.

- Dans Ω_a, on sait seulement qu'en introduisant la moyenne

  $$\overline{e_a^k} \;:=\; \frac{1}{|\Omega_a|}\int_{\Omega_a} e_a^k\,,$$

  on a par inégalité de Poincaré-Wirtinger

  $$\int_{\Omega_a} \left|e_a^k - \overline{e_a^k}\right|^2 \;\leq\; C_{PW}\int_{\Omega_a} |\nabla e_a^k|^2.$$

  La suite $(e_a^k - \overline{e_a^k})$ converge donc vers 0 dans $H^1(\Omega_a)$. Il faut encore travailler pour démontrer que (e_a^k) converge vers 0.

Remarque 4 Pour conclure, on utilise (a_k) avec $w \equiv 1$:

$$0 \;=\; \int_\Gamma (e_a^{k+1} - h_a^k) \;=\; \int_\Gamma (e_a^{k+1} - e_b^k) + \int_\Gamma \frac{\partial e_b^k}{\partial n_b}.$$

On choisit $w \in C_c^\infty(\Omega)$ telle que $w \equiv 1$ sur Γ. En écrivant $1 = w$ dans la dernière intégrale et en intégrant par parties dans Ω_b, on obtient

$$0 \;=\; \int_\Gamma (e_a^{k+1} - e_b^k) + \int_{\Omega_b} \Delta e_b^k w + \int_{\Omega_b} \nabla e_b^k \cdot \nabla w.$$

La seconde intégrale est nulle car $\Delta e_b^k \equiv 0$ et comme $e_b^k \to 0$ dans $H^1(\Omega_b)$, on obtient en faisant tendre k vers $+\infty$,

$$\int_\Gamma e_a^k \overset{k\uparrow\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{s9}$$

Finalement, on utilise l'inégalité de Poincaré suivante (qui peut se démontrer par contradiction comme dans la remarque précédente).

$$\int_{\Omega_a} |w|^2 \;\leq\; C'_P \left[\int_{\Omega_a} |\nabla w|^2 + \left(\int_\Gamma w \right)^2 \right], \qquad \forall w \in H^1(\Omega_a).$$

En appliquant cette inégalité à e_a^k, on déduit de (s8) et (s9) que $e_a^k \to 0$ dans $H^1(\Omega_a)$.
Une analyse aussi poussée n'est pas attendue des élèves.