École Polytechnique. Promotion 2011.
Analyse Numérique et Optimisation (MAP 431)
Contrôle hors classement du Lundi 22 Avril 2013
Sujet proposé par Benoît Merlet.

Important : *N'oubliez pas d'indiquer votre numéro de PC sur votre copie.*

Exercice 1 (Différences finies, 8 points)
On modélise l'écoulement des vagues en dimension 1 par l'équation avec conditions périodiques

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 & \text{pour } x \in \mathbf{R},\ t > 0, \\ u(x+1,t) = u(x,t) & \text{pour } x \in \mathbf{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{pour } x \in \mathbf{R}. \end{cases} \tag{1}$$

La donnée initiale u_0 est une fonction régulière et 1-périodique.

Soient $N \geq 1$ et $\Delta t > 0$. On pose $\Delta x = 1/N$ et pour $j \in \mathbf{Z}$ et $n \in \mathbf{N}$ on définit le point de discrétisation

$$(x_j, t_n) = (j\Delta x\,,\, n\Delta t)\,.$$

Pour construire une approximation u_j^n de la solution exacte de (1) au point (x_j, t_n), nous proposons le schéma centré en espace suivant.

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta t}\left[\frac{-u_{j+1}^{n+1} + 2\,u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} - \frac{-u_{j+1}^n + 2\,u_j^n - u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}\right] + \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} = 0.$$

La condition initiale est donnée par $u_j^0 = u_0(x_j)$ et les conditions aux limites périodiques se traduisent par $u_{j+N}^n = u_j^n$ quel que soit $j \in \mathbf{Z}$.

Question 1 En supposant que $c = \Delta x/\Delta t$ est fixé, montrer que le schéma est consistant d'ordre 1 avec le problème (1).

Question 2 Étudier la stabilité L^2 du schéma (on calculera le facteur d'amplification $A(k)$).

Question 3 En déduire un résultat de convergence.

On définit les énergies continue $E(t) = \displaystyle\int_0^1 u^2(x,t)\,dx$ et discrète $E^n = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{j=0}^{N-1} |u_j^n|^2$.
Nous admettons que pour la solution exacte, $E(t)$ est conservée. Ne pas le démontrer !

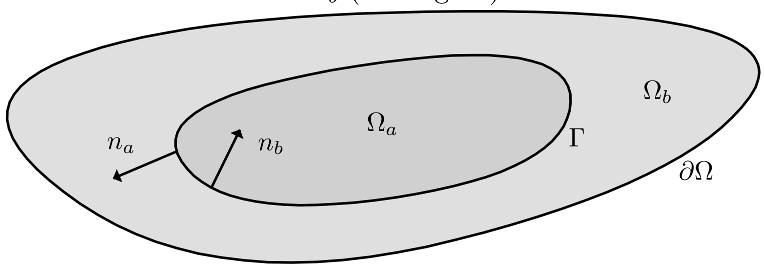
Question 4 La suite $(E^n)_n$ est-elle constante, croissante, décroissante ? Qu'en concluez vous sur la nature du schéma ?

Exercice 2 (Formulation variationnelle, 12 points)

Considérons un domaine ouvert Ω de $\mathbf{R}^N$ connexe et borné dont le bord est régulier. Étant donnée $f \in L^2(\Omega)$, nous notons $u \in H^2(\Omega)$ la solution du problème aux limites.

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2}$$

Considérons maintenant un sous ensemble ouvert $\Omega_a \subset \Omega$ dont le bord Γ est régulier. On suppose $\overline{\Omega}_a \subset \Omega$ et on pose $\Omega_b = \Omega \setminus \overline{\Omega}_a$. On note n_a la normale extérieure sur $\partial\Omega_a$ et $n_b = -n_a$ la normale extérieure sur $\partial\Omega_b$ (voir figure).



Introduisons l'espace $H = \{w \in H^1(\Omega_b) \ : \ w = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$ et les deux formulations variationnelles :

a) Étant donnée $g_a \in L^2(\Gamma)$, trouver $v_a \in H^1(\Omega_a)$ telle que

$$\int_{\Omega_a} \nabla v_a \cdot \nabla w + \int_\Gamma (v_a - g_a) w - \int_{\Omega_a} f w = 0 \qquad \forall\, w \in H^1(\Omega_a).$$

b) Étant donnée $g_b \in L^2(\Gamma)$, trouver $v_b \in H$ telle que

$$\int_{\Omega_b} \nabla v_b \cdot \nabla w + \int_\Gamma (v_b - g_b) w - \int_{\Omega_b} f w = 0 \qquad \forall\, w \in H.$$

Question 5 Montrer que la formulation variationnelle (a) admet une unique solution.

Question 6 Montrer que si $v_a \in H^2(\Omega_a)$ est solution de (a) alors v_a est solution d'un problème aux limites à préciser.
Quel est le problème aux limites correspondant à la formulation variationnelle (b) ?

On se donne $v_a^0 \in H^1(\Omega_a)$ et $v_b^0 \in H$ et on définit de manière itérative pour $k \geq 0$,

$$v_a^{k+1} \in H^1(\Omega_a) \text{ est solution de } (a) \text{ avec } g_a := -\frac{\partial v_b^k}{\partial n_b} + v_b^k. \tag{3}$$

$$v_b^{k+1} \in H \text{ est solution de } (b) \text{ avec } g_b := -\frac{\partial v_a^k}{\partial n_a} + v_a^k. \tag{4}$$

Dans la suite nous admettons que les solutions des formulations variationnelles rencontrées sont de régularité H^2. Notons u la solution du problème (2). Nous souhaitons montrer que $(v_a^k)_k$ converge vers $u_{|\Omega_a}$ dans $H^1(\Omega_a)$ et que $(v_b^k)_k$ converge vers $u_{|\Omega_b}$ dans $H^1(\Omega_b)$. Pour cela on définit les erreurs

$$e_a^k = v_a^k - u_{|\Omega_a} \in H^1(\Omega_a), \qquad e_b^k = v_b^k - u_{|\Omega_b} \in H, \qquad \text{pour } k \geq 0.$$

Question 7 Montrer que les suites $v_a^k = u_{|\Omega_a}$, $v_b^k = u_{|\Omega_b}$ vérifient (3) et (4).
En déduire, dans le cas général, la formulation variationnelle satisfaite par e_a^{k+1} en fonction de

$$h_a^k := -\frac{\partial\, e_b^k}{\partial n_b} + e_b^k$$

et celle satisfaite par e_b^{k+1} en fonction de

$$h_b^k := -\frac{\partial\, e_a^k}{\partial n_a} + e_a^k.$$

Donner les problèmes aux limites correspondants.

Question 8 Montrer que pour $k \geq 0$ et $w \in H^1(\Omega_a)$, on a

$$\int_{\Omega_a} \nabla e_a^{k+1} \cdot \nabla w - \int_\Gamma \frac{\partial e_a^{k+1}}{\partial n_a} w \;=\; 0.$$

En déduire que pour $k \geq 0$, on a l'identité

$$\int_{\Omega_a} |\nabla e_a^{k+1}|^2 + \frac{1}{4} \int_\Gamma |h_b^{k+1}|^2 \;=\; \frac{1}{4} \int_\Gamma |h_a^k|^2.$$

Indication : on pourra utiliser $\alpha\beta = \frac{1}{4}(\alpha+\beta)^2 - \frac{1}{4}(\alpha-\beta)^2$.

Question 9 Ecrire l'identité correspondante pour e_b^{k+1}. En déduire qu'on a

$$\sum_{k\geq 1} \left(\int_{\Omega_a} |\nabla e_a^k|^2 + \int_{\Omega_b} |\nabla e_b^k|^2 \right) \;\leq\; C.$$

Que pouvez vous en conclure ?