# Approximation d'un problème aux limites dans un domaine à coins.

*Benoît Merlet,*

17 décembre 2013

## Introduction.

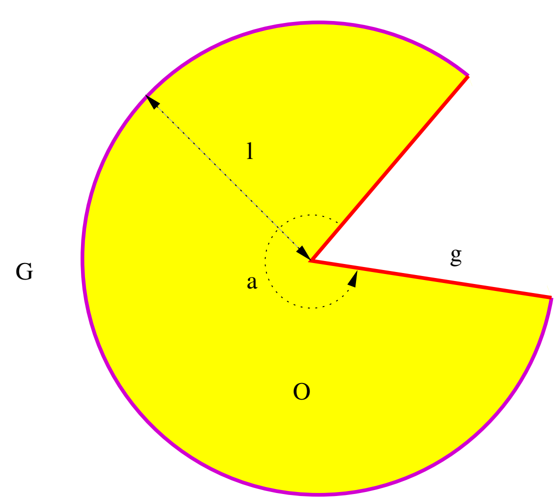
Ce sujet propose d'explorer la méthode des éléments finis pour la résolution de problèmes elliptiques dans une situation particulière : le cas où le domaine considéré n'est pas à bord régulier. Cela arrive naturellement : par exemple, si on s'intéresse au champs éléctro-magnétique autour d'un avion (radars) on aura à résoudre les équations de Maxwell autour de l'avion, qui n'est pas un objet partout régulier (angles au niveau des ailes et ailerons, nez pointu pour les avions de chasse, ...).

À la vérité, toutes les irrégularités ne posent pas de difficulté : par exemple, pour le problème de Laplace avec conditions de Dirichlet, (Fourier ou Neumann) posé dans un domaine polygonal convexe, les résultats de convergence vus en cours sont encore valides. Nous proposons d'étudier ici un cas où la méthode des éléments finis perd de son efficacité : le cas où le domaine possède un angle rentrant. Les questions qui suivent visent à observer la perte dans la vitesse de convergence de la méthode des éléments finis, mettre en lumière l'origine de cette perte et enfin proposer et mettre en œuvre une méthode pour y remédier.

Les codes demandés seront programmés en FreeFem++. Pour vous faire gagner du temps avec les problèmes de syntaxe, un code est fourni avec le sujet qui sera utilisé à la question 3. Ce code contient toutes les opérations élémentaires qui vous seront utiles. Vous pouvez aussi utiliser le document d'aide de FreeFem++ et en désespoir de cause me contacter, que ce soit pour des difficultés liées à la programmation ou plus théoriques. ( `merlet@cmap.polytechnique.fr`)

## Une cymbale fixée partiellement.

On considère une plaque métallique fine et plane décrite par le domaine $\Omega$ ci-dessous. Le domaine est un disque de rayon 1 privé d'une portion conique d'angle $2\pi - \alpha$ ayant son sommet au centre du disque.



L'objet est fixé sur la partie $\gamma$ de son bord, le reste du domaine est libre de vibrer. On suppose que les vibrations verticales de cet objet sont décrites par l'équation des ondes

$$\left\{\begin{array}{rcll} \partial_t^2 u - \Delta u &=& 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbf{R}_+ \\ u(x,t) &=& 0 & \text{sur } \gamma \times \mathbf{R}_+, \\ \partial_n u(x,t) &=& 0 & \text{sur } \Gamma \times \mathbf{R}_+. \end{array}\right.$$

On s'intéresse aux solutions de la forme $u(x,t) = \sin(\omega t) v(x)$ et en particulier à la première harmonique. Celle-ci correspond au cas où $v$ est un vecteur propre associé à la plus petite valeur propre de l'opérateur $L : f \in L^2(\Omega) \mapsto u$, défini par le problème aux limites suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta u &=& f & \text{dans } \Omega \\ u &=& 0 & \text{sur } \gamma, \\ \partial_n u &=& 0 & \text{sur } \Gamma. \end{array}\right. \tag{1}$$

# 1 Approximation par éléments finis

Quitte à déplacer le domaine, on suppose dorénavant

$$\Omega \; = \; \{r\cos\theta, r\sin\theta) : 0 < r < 1, \; 0 < \theta < \alpha\}.$$

**Question 1** *On se donne une fonction décroissante $\phi \in C^2([0,1])$ qui vérifie $\phi(0) = 1$ et $\phi'(0) = \phi(1) = \phi'(1) = 0$. On pose alors en coordonnées polaires*

$$u_0(r,\theta) \; := \; \phi(r) r^{\frac{\pi}{\alpha}} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\theta\right).$$

*Montrer que $u_0 \in H^1_\gamma(\Omega)$ et qu'au sens classique on a :*

$$\Delta u_0 \; = \; \left(\left(1 + 2\frac{\pi}{\alpha}\right)\phi'(r) r^{\frac{\pi}{\alpha}-1} + \phi''(r) r^{\frac{\pi}{\alpha}}\right)\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\theta\right).$$

*Vérifier que $\Delta u_0 \in L^2(\Omega)$ et montrer que la fonction $u_0$ est solution du problème(1) avec $f = -\Delta u_0$.*

Indication : en coordonnées polaires : $\nabla v = \frac{\partial v}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta$ et $\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}$.

**Question 2** *Donnez la formulation variationnelle (usuellement) associée au problème (1).*

**Question 3** *Le programme* FreeFem++ *qui accompagne le sujet permet de calculer une approximation numérique du problème (1) par la méthode des éléments finis P1. Dans ce programme le second membre est $f = \Delta u_0$ où $u_0$ est la fonction introduite à la question 1 avec une fonction $\phi$ particulière définie par morceaux. Quelle vitesse de convergence observe-t-on numériquement pour $\|u_0 - u_h\|_{L^2}$ ? Comment cette vitesse dépend-elle de l'angle $\alpha$ pour $0 < \alpha < 2\pi$ ?*

Indication : pour $h$ assez petit et pour une méthode d'ordre $p$, on s'attend à avoir $\|u - u_h\|_{L^2} \; = \; C(u)h^p + o(h^p)$ qui entraîne

$$p \; \sim \; \ln\left(\frac{\|u - u_h\|_{L^2}}{\|u - u_{h/2}\|_{L^2}}\right) / \ln 2.$$

Cela donne un moyen pratique d'évaluer l'ordre $p$.

Dans le cas d'un domaine à bord régulier, le résultat donné dans le cours est :

$$\|u - u_h\|_{L^2} \; \leq \; C(f)\, h^2.$$

Au cours de la preuve de cette inégalité, on invoque un résultat de régularité sans lien avec la discrétisation : pour toute fonction $f \in L^2(\Omega)$, la solution variationnelle $u$ de (1) est un élément de $H^2(\Omega) \cap H^1_\gamma(\Omega)$ et on a

$$\|D^2 u\|_{L^2} \; \leq \; C_{cont.} \|f\|_{L^2}.$$

**Question 4** *Est-ce que $u_0 \in H^2(\Omega)$ ? Est-ce que cela dépend de la valeur de $\alpha \in ]0, 2\pi[$ ? Est-ce cohérent avec les vitesses de convergence observées à la question 3, et pourquoi ?*

## 2 Coefficient singulier. Définition et approximation

On suppose maintenant et jusqu'à la fin $\alpha \in ]\pi, 2\pi[$.
On note $H^1_\gamma(\Omega)$ l'espace $\{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ sur } \gamma\}$ et $V \subset H^1_\gamma(\Omega)$ l'image de $L^2(\Omega)$ par $L$.

**Question 5** *Montrer que* $H^2(\Omega) \cap V = \left\{v \in H^2(\Omega) \cap H^1_\gamma(\Omega) \ : \ \partial_n v = 0 \textit{ sur } \Gamma\right\}$.

**Question 6** *Que pensez vous de la vitesse de convergence de la méthode d'éléments finis P1 dans le cas où la solution exacte $u$ est un élément de $H^2(\Omega) \cap V$ ? Vérifiez cette convergence numériquement en modifiant le programme* FreeFem++ *fourni avec le sujet (pensez à sauvegarder le programme modifié sous un autre nom).*
Indication : pour le test numérique, si on choisit d'abord $f$, il est difficile (/impossible) de déterminer la solution exacte pour la comparer à la solution approchée. On choisira donc d'abord $u \in H^2(\Omega) \cap V$ et on calculera $f = -\Delta u$ à la main.

On note $H$ l'image réciproque de $V \cap H^2(\Omega)$ par $L$ , i.e.

$$H \ = \ \left\{f \in L^2(\Omega) : \exists v \in H^2(\Omega) \cap V \text{ t.q. } -\Delta v = f \text{ dans } \Omega\right\}.$$

et on note $D$ l'orthogonal de $H$ dans $L^2(\Omega)$ :

$$D \ := \ \left\{f \in L^2(\Omega) \ : \ \int_\Omega f \Delta v = 0, \ \forall v \in H^2(\Omega) \cap V\right\}.$$

On définit la fonction $p$ en coordonnées polaires par :

$$p(r, \theta) \ := \ c_\alpha (r^{\frac{\pi}{\alpha}} + r^{-\frac{\pi}{\alpha}}) \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\theta\right) \qquad \text{avec} \quad c_\alpha = \sqrt{\frac{2}{\alpha} \frac{1 - (\pi/\alpha)^2}{2 - (\pi/\alpha)^2}}.$$

**Question 7** *Montrer que $p \in D$ et que $\|p\|_{L^2} = 1$.*

Nous admettrons que $D$ est de dimension 1 et est donc engendré par la fonction $p$. Nous admettrons aussi que $H$ est fermé dans $L^2(\Omega)$.
Pour $f \in L^2(\Omega)$, on note $c(f)$ et on appelle coefficient singulier la quantité $c(f) = (p, f)_{L^2(\Omega)}$.

**Question 8** *Montrer que $\tilde{f} := f - c(f)p \in H$. Que pensez-vous de l'approximation par éléments finis de $\tilde{u} := L(\tilde{f})$ ?*

**Question 9** *Réalisez un programme* FreeFem++ *qui calcule une approximation de $c(f)$. Vérifiez que le coefficient $c(f)$ est calculé avec une erreur qui tend vers 0 à l'ordre au moins 1 (prendre $f = p$ pour le test de convergence).*

## 3 Approximation de la partie singulière

**Question 10** *Montrer que $-\Delta u_0 \notin H$. En déduire que pour tout $f \in L^2(\Omega)$, il existe un réel $\beta(f)$ tel que $L(f) - \beta(f) u_0$ appartienne à $V \cap H^2(\Omega)$.*

**Question 11** *On note $\beta_0 := \beta(p)$ Montrer que $\beta_0 = 1/(\pi c_\alpha)$.*
Indication : en utilisant la définition de $p \in D$, on pourra justifier les identités

$$1 \ = \ \int_\Omega p^2 \ = \ -\int_\Omega p \Delta[L(p)] \ = \ -\beta_0 \int_\Omega p \Delta u_0 \ = -\beta_0 \lim_{r \to 0} \int_{\Omega \setminus B(0,r)} p \Delta u_0.$$

Pour calculer la dernière intégrale, on pourra intégrer deux fois par parties en tenant compte de $p, u_0 \in H^2(\Omega \setminus B(0,r))$ et de $\Delta p = 0$ dans $\Omega$. On utilisera les expressions explicites de $u_0$ et $p$ pour passer à la limite $r \to 0$ dans les termes de bord.

**Question 12** *Montrer que pour tout $f \in L^2(\Omega)$, $f + c(f)\beta_0 \Delta u_0 \in H$. Que pensez-vous de l'approximation par éléments finis de $L(f + c(f)\beta_0 \Delta u_0)$ ?*

**Question 13** *Proposez et mettez en œuvre une méthode d'approximation de $L(f)$ dont la vitesse de convergence est 2 pour la norme $L^2$, c'est à dire*

$$\|u - \hat{u}_h\|_{L^2} \ \leq \ C\|f\|_{L^2}\, h^2.$$

*Vérifiez numériquement la vitesse de convergence pour $f \equiv 1$.*

# 4 Problème de valeurs propres

Nous admettons qu'il existe une base Hilbertienne orthonormée $(\phi_n)_{n\geq 1}$ de $L^2(\Omega)$ et une suite croissante de réels $(\lambda_n) \subset ]0, +\infty[$ telles que

$$L(\phi_n) \ = \ \frac{1}{\lambda_n}\phi_n, \qquad \forall n \geq 1.$$

La suite $(\lambda_n)$ est la suite croissante des valeurs propres de l'opérateur $-\Delta$ avec conditions de Dirichlet sur $\gamma$ et conditions de Neumann sur $\Gamma$ (voir cours).
Pour déterminer la plus petite valeur propre de l'opérateur $L$, nous proposons d'utiliser la méthode de la puissance. Celle ci consiste à choisir $v_0 \in L^2(\Omega)$ quelconque non nul et à résoudre successivement.

$$\tilde{v}_{k+1} \ := \ L(v_k), \qquad \mu_{k+1} := 1/\|\tilde{v}_{k+1}\|_{L^2}, \qquad v_{k+1} := \mu_{k+1}\tilde{v}_{k+1}, \qquad k \geq 0. \tag{2}$$

La dernière étape est une normalisation qui permet d'assure $\|v_k\|_{L^2} = 1$ pour $k \geq 1$. Ecrivons la décomposition de $v_1$ dans la base $(\phi_k)$ :

$$v_0 \ = \ \sum_{n\geq 1} \alpha_n \phi_n.$$

On a alors

$$v_1 \ = \ C_1 \sum_{n\geq 1} \frac{\alpha_n}{\lambda_n}\phi_n, \quad \text{et successivement} \quad v_k \ = \ C_k \sum_{n\geq 1} \frac{\alpha_n}{(\lambda_n)^k}\phi_n,$$

où la constante de normalisation $C_k > 0$ est telle que $\|v_k\|_{L^2} = 1$. Admettons que $\lambda_2 > \lambda_1$ (ce qui est vrai) et supposons qu'on ait choisi $v_0$ de sorte que $\alpha_1 \neq 0$. On peut alors écrire

$$C_k^{-2} \ = \ \left\|\sum_{n\geq 1} \frac{\alpha_n}{(\lambda_n)^k}\phi_k\right\|_{L^2}^2 \ = \ \sum_{n\geq 1}\left|\frac{\alpha_n}{(\lambda_n)^k}\right|^2 \ = \ \left(\frac{\alpha_1}{\lambda_1^k}\right)^2 \left\{1 + \frac{1}{\alpha_1^2}\sum_{n\geq 2}(\alpha_n)^2\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\right)^{2k}\right\}.$$

La dernière somme est bornée par $(\lambda_1/\lambda_2)^{2k}\sum|\alpha_n|^2 = (\lambda_1/\lambda_2)^{2k}\|v_0\|_{L^2}^2 \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On a donc $C_k \sim \lambda_1^k/|\alpha_1|$. Soit $\varepsilon = \pm 1$ le signe de $\alpha_1$, on calcule maintenant :

$$\begin{aligned}
\|v_k - \varepsilon\phi_1\|_{L^2}^2 \ &= \ \left(\frac{C_k\alpha_1}{\lambda_1^k} - \varepsilon\right)^2 + C_k^2\sum_{n\geq 2}\left(\frac{\alpha_n}{(\lambda_n)^k}\right)^2 \ = \ \left(\frac{C_k|\alpha_1|}{\lambda_1^k} - 1\right)^2 + \frac{C_k^2}{\lambda_1^{2k}}\sum_{n\geq 2}\alpha_n^2\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^{2k} \\
&\leq \ \left(\frac{C_k|\alpha_1|}{\lambda_1^k} - 1\right)^2 + \frac{C_k^2}{\lambda_1^{2k}}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{2k}\|v_0\|_{L^2}^2 \ \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \ 0.
\end{aligned}$$

Pour le passage à la limite, on a utilisé $C_k \sim \lambda_1^k/|\alpha_1|$ et $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$. On en déduit que $v_k$ converge vers $\varepsilon\phi_1$. De même, $\mu_k$ converge vers la valeur propre $\lambda_1$.

**Question 14** *Mettez en œuvre la méthode de la puissance* (2) *pour calculer une valeur approchée de $\lambda_1$ pour diverses valeurs de $\alpha \in ]\pi, 2\pi[$. Bien sûr, on remplacera l'opérateur $L$ dans* (2) *par son approximation de la question 13.*