

Mini-projet d'analyse numérique du cours MAP 431

Vibrations forcées de cordes et de membranes

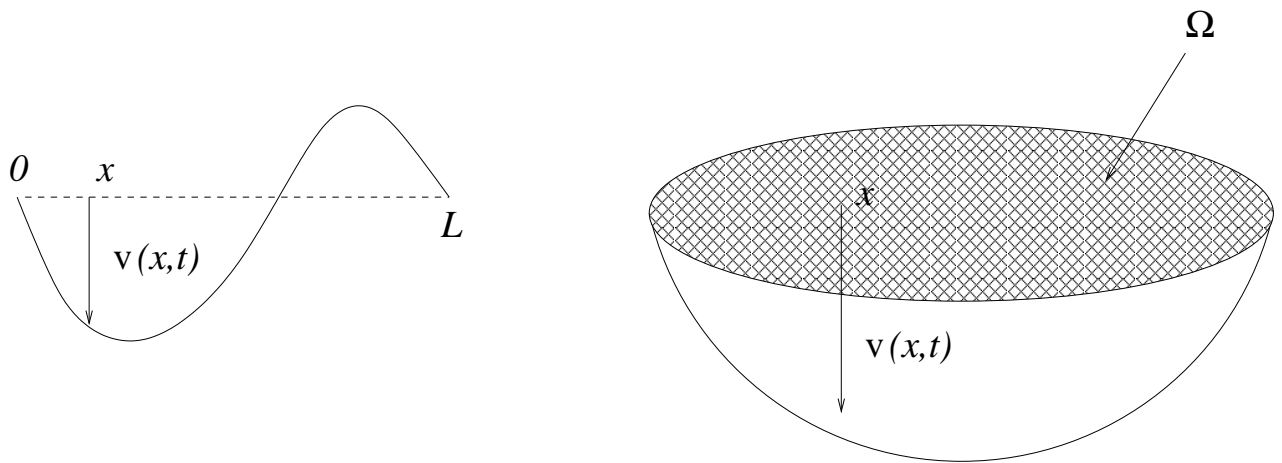
Sujet proposé par Eric Cancès (cances@cermics.enpc.fr)

Ce projet est une introduction à l'étude mathématique et numérique des phénomènes vibratoires, phénomènes qui ont une importance considérable dans les sciences de l'ingénieur car ils interviennent dans de très nombreuses situations pratiques : résistance au vent des ouvrages d'art, acoustique, stabilité des véhicules de transport, recherche de gisements pétroliers, ... pour n'en citer que quelques-unes.

ETUDE THÉORIQUE

On considère les deux systèmes suivants :

- une corde élastique tendue de longueur L , dont la configuration de référence est décrite par le segment $\Omega =]0, L[$;
- une membrane élastique tendue, dont la configuration de référence est décrite par le domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.



On note $x \in \Omega$ la variable d'espace et $t \in \mathbb{R}^+$ la variable de temps, et on modélise le déplacement transverse $v(x, t)$ de ces systèmes, en réponse à une excitation $f(x, t)$, par le

problème aux limites

$$(I) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x, t) - \Delta v(x, t) = f(x, t) & \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}^{+*} \\ v(x, t) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}^{+*} \\ v(x, 0) = 0 & \text{sur } \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) = 0 & \text{sur } \Omega. \end{cases}$$

On considère le cas d'une excitation harmonique de la forme

$$f(x, t) = g(x) \cos(\omega t)$$

où $\omega \in \mathbb{R}$ est une pulsation et g une fonction donnée de $L^2(\Omega)$.

On note $(\lambda_k, u_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ les éléments propres du laplacien de Dirichlet sur le domaine Ω , ordonnés de telle sorte que $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$. On rappelle (cf. [1, Théorème 7.3.5]) que la suite $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$, que les $(u_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ forment une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$, et que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{cases} u_k \in H_0^1(\Omega), \\ -\Delta u_k = \lambda_k u_k. \end{cases}$$

On rappelle enfin que dans le cas de la corde ($\Omega =]0, L[$), les $(\lambda_k, u_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ sont connus analytiquement :

$$\lambda_k = \frac{k^2 \pi^2}{L^2}, \quad u_k(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(k\pi \frac{x}{L}\right).$$

On note $(g_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ les coefficients de la fonction $g \in L^2(\Omega)$ dans la base $(u_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$, et on pose $\omega_k = \sqrt{\lambda_k}$. L'unique solution de (I) dans $C^0([0, +\infty[, H^1(\Omega)) \cap C^1([0, +\infty[, L^2(\Omega))$ (cf. [1, Théorème 8.3.4]) peut s'écrire sous la forme

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} y_k(t) u_k(x).$$

Question 1. Etablir une équation différentielle vérifiée par la fonction $y_k(t)$ (de \mathbb{R}^+ à valeurs dans \mathbb{R}), puis résoudre analytiquement cette équation.

Question 2. Qu'advient-il lorsque la fréquence d'excitation $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ est voisine d'une des fréquences propres $\nu_k = \frac{\omega_k}{2\pi}$ du système? Décrire et nommer les phénomènes physiques correspondants.

Question 3. Pour $K \in \mathbb{N}^*$, on note

$$v_K(x, t) = \sum_{k=1}^K y_k(t) u_k(x).$$

Montrer que

$$\|v(\cdot, t) - v_K(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)} \leq 2 \left(\sum_{k=K+1}^{+\infty} \frac{|g_k|^2}{(\omega_k^2 - \omega^2)^2} \right)^{1/2}.$$

En déduire que

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^+} \|v(\cdot, t) - v_K(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)} \xrightarrow{K \rightarrow +\infty} 0.$$

On va maintenant établir que plus la fonction g est régulière, plus la vitesse de convergence de $(u_K)_{K \in \mathbb{N}^*}$ vers u est élevée.

Question 4. On suppose dans cette question que le support de g est un compact inclus dans Ω et que $g \in H^m(\Omega)$ pour un entier $m \geq 0$ (avec la convention $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$). Montrer que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^m |g_k|^2 < +\infty.$$

En déduire que si $g \in H^m(\Omega)$ est à support compact,

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^+} \|v(\cdot, t) - v_K(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C}{\lambda_{K+1}^{m/2+1}},$$

où C dépend de g , ω , et m , mais ne dépend pas de K .

Pour terminer cette étude de convergence, il reste à estimer la vitesse de croissance de la suite $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$. On peut montrer que pour un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$

$$\lambda_K \underset{K \rightarrow +\infty}{\sim} 4\pi^2 \left(\frac{K}{\text{mes}(B_d) \text{mes}(\Omega)} \right)^{2/d} \quad (1)$$

où $B_d = \{x \in \mathbb{R}^d, |x| < 1\}$.

Question 5. Vérifier que la formule (1) fonctionne pour $\Omega =]0, L[$. Démontrer ensuite cette formule pour l'hypercube $\Omega =]0, 1[^d$ de \mathbb{R}^d .

Indication : On écrira une expression analytique des valeurs propres et on commencera par montrer que le nombre $N(\mu)$ de valeurs propres inférieures ou égales à μ vérifie la formule de Weyl

$$N(\mu) \underset{\mu \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\text{mes}(B_d)}{(2\pi)^d} \text{mes}(\Omega) \mu^{d/2}.$$

Commentaire. En rassemblant les résultats précédents, on obtient que, si Ω est un ouvert de \mathbb{R}^d et si $g \in H^m(\Omega)$ est à support compact, alors pour K assez grand,

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^+} \|v(\cdot, t) - v_K(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C}{K^{(m+2)/d}}$$

où C ne dépend pas de K . En particulier, si $g \in \mathcal{D}(\Omega)$, la méthode de résolution de (I) par superposition de modes converge plus vite que n'importe quelle puissance négative de K . On dit que cette méthode est d'ordre infini. Notons cependant que cette vitesse de convergence ne peut être obtenue en pratique que si l'on connaît exactement les modes propres du laplacien de Dirichlet sur Ω , ce qui n'est le cas que pour des domaines Ω très particuliers (dimension 1, pavé de \mathbb{R}^d , disque de \mathbb{R}^2 , ...).

Question 6. Ecrire un programme `scilab` permettant de simuler la réponse d'une corde de longueur $L = 1$ ($\Omega =]0, 1[$) à l'excitation $f(x, t) = \chi_{]a, b[}(x) \cos(\omega t)$ (où $\chi_{]a, b[}$ désigne la fonction caractéristique de l'intervalle $]a, b[$), sur un intervalle de temps $[0, T]$. Ce programme devra permettre de visualiser sur un même graphique l'évolution au cours du temps de trois solutions approchées :

1. la solution numérique obtenue en appliquant la méthode de superposition de modes (décomposition sur les K premiers modes propres) ;
2. la solution obtenue en discrétisant en espace par la méthode des éléments finis $P1$, et en temps par le θ -schéma [1, Section 8.7.2] avec $\theta = 1/2$ et avec un pas de temps Δt . On se limitera au cas d'un maillage régulier de l'intervalle $\Omega =]0, 1[$, de pas $h = 1/N$;
3. une solution de référence obtenue par superposition des K_r premiers modes propres.

Question 7. Effectuer des simulations numériques avec $a = 0.76$, $b = 0.78$, $K_r = 200$, en faisant varier les paramètres ω , T , Δt , N et K , dans les ensembles suivants : $\omega = \{1, 5, 10, 22, 50\}$, $T \in \{1, 4.5, 20.125\}$, $\Delta t = \{0.1, 0.01, 0.001\}$, $N = \{25, 50, 100, 200\}$, $K = \{5, 10, 20\}$ (on choisira quelques jeux de paramètres significatifs parmi tous les possibles). Commenter les résultats (précision, temps de calcul).

CALCUL DES MODES PROPRES D'UNE MEMBRANE

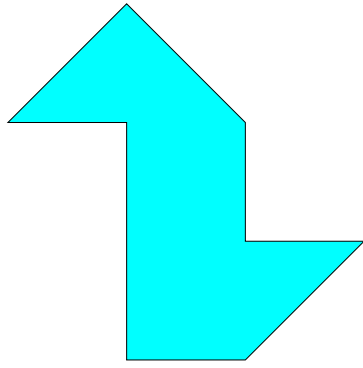
Sauf exception (rectangle, disque, ...), on ne dispose pas d'expression analytique des modes propres d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Pour mettre en œuvre la méthode de superposition de modes, il faut donc calculer au préalable une approximation des premiers K modes propres du laplacien de Dirichlet.

Ceci peut se faire, comme expliqué dans le cours [1, Section 7.4], en utilisant la méthode des éléments finis.

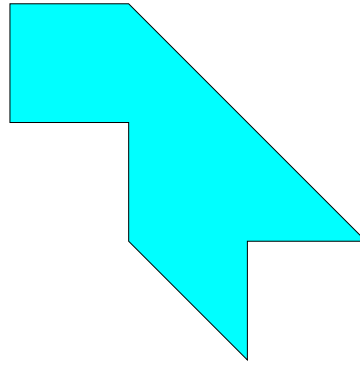
Question 8. Ecrire un programme `FreeFEM++` permettant d'approcher les 10 premiers modes propres du laplacien de Dirichlet pour les deux domaines (la "coquotte" et la "flèche") représentés sur la figure ci-dessous (chacun de ces domaines est un assemblage de 7 triangles rectangles isocèles isométriques de côtés de longueurs $\{1, 1, \sqrt{2}\}$).

Question 9. Evaluer la vitesse de convergence des 10 premières valeurs propres de la coquotte et de la flèche en fonction de la taille du maillage (on contrôlera la taille du maillage en faisant varier le nombre de nœuds sur le bord du domaine).

Commentaire. Le problème de la relation entre le spectre et la forme de la membrane a longtemps intrigué la communauté scientifique. La question qui se pose est la suivante : la donnée du spectre (c'est-à-dire des $(\lambda_k)_{1 \leq k \leq +\infty}$) suffit-elle pour déterminer la forme de l'ouvert Ω ? Soit en termes plus imagés : "Peut-on entendre la forme d'un tambour ?" [3]. Ce n'est qu'en 1991 que cette question a été résolue : la réponse est non. Les mathématiciens C. Gordon, D. Webb et S. Wolpert ont en effet montré que la coquotte et la flèche possèdent exactement le même spectre [2].



Forme "coquette".



Forme "flèche".

Question 10. On reprend les notations du cours [1, Section 7.4]. En utilisant la formule de Courant-Fisher [1, Proposition 7.3.4], montrer que pour tout $1 \leq k \leq nd$,

$$\lambda_{k,h} \geq \lambda_k.$$

Références

- [1] G. Allaire, *Analyse numérique et optimisation*, Ecole Polytechnique, Edition 2010.
- [2] C. Gordon, D. Webb and S. Wolpert, *One cannot hear the shape of a drum*, Bull. Amer. Math. Soc., 27 (1992) 134-138.
- [3] M. Kac, *Can one hear the shape of a drum ?*, Amer. Math. Monthly 73 (1966) 1-23.