Chapitre 2

MÉTHODE DES DIFFÉRENCES FINIES

Exercice 2.2.1 Montrer que le schéma à six points

$$\begin{aligned}\frac{u_{j+1}^{n+1}-u_{j+1}^{n}}{12\Delta t}+\frac{5(u_{j}^{n+1}-u_{j}^{n})}{6\Delta t}+\frac{u_{j-1}^{n+1}-u_{j-1}^{n}}{12\Delta t}\\+\nu\frac{-u_{j-1}^{n+1}+2u_{j}^{n+1}-u_{j+1}^{n+1}}{2(\Delta x)^2}+\nu\frac{-u_{j-1}^{n}+2u_{j}^{n}-u_{j+1}^{n}}{2(\Delta x)^2}=0\end{aligned} \tag{2.1}$$

n'est rien d'autre que le θ-schéma

$$\frac{u_{j}^{n+1}-u_{j}^{n}}{\Delta t}+\theta\nu\frac{-u_{j-1}^{n+1}+2u_{j}^{n+1}-u_{j+1}^{n+1}}{(\Delta x)^2}+(1-\theta)\nu\frac{-u_{j-1}^{n}+2u_{j}^{n}-u_{j+1}^{n}}{(\Delta x)^2}=0 \tag{2.2}$$

avec $\theta = 1/2-(\Delta x)^2/12\nu\Delta t$

Correction. Il suffit de constater que

$$\begin{aligned}&\frac{u_{j+1}^{n+1}-u_{j+1}^{n}}{12\Delta t}+\frac{5(u_{j}^{n+1}-u_{j}^{n})}{6\Delta t}+\frac{u_{j-1}^{n+1}-u_{j-1}^{n}}{12\Delta t}\\&\qquad=\frac{(u_{j}^{n+1}-u_{j}^{n})}{\Delta t}+\frac{u_{j+1}^{n+1}-u_{j+1}^{n}}{12\Delta t}-\frac{2(u_{j}^{n+1}-u_{j}^{n})}{12\Delta t}+\frac{u_{j-1}^{n+1}-u_{j-1}^{n}}{12\Delta t}\\&\qquad=\frac{(u_{j}^{n+1}-u_{j}^{n})}{\Delta t}-\frac{-u_{j-1}^{n+1}+2u_{j}^{n+1}-u_{j+1}^{n+1}}{12\Delta t}+\frac{-u_{j-1}^{n}+2u_{j}^{n}-u_{j+1}^{n}}{12\Delta t}\;.\end{aligned}$$

En remplaçant cette expression dans le schéma à six points, on en déduit que ce dernier est équivalent à

$$\begin{aligned}&\frac{u_{j}^{n+1}-u_{j}^{n}}{\Delta t}+\left(\frac{\nu}{2}-\frac{(\Delta x)^2}{12\Delta t}\right)\frac{-u_{j-1}^{n+1}+2u_{j}^{n+1}-u_{j+1}^{n+1}}{(\Delta x)^2}\\&\qquad+\left(\frac{\nu}{2}+\frac{(\Delta x)^2}{12\Delta t}\right)\frac{-u_{j-1}^{n}+2u_{j}^{n}-u_{j+1}^{n}}{(\Delta x)^2}=0\end{aligned}$$

qui n'est rien d'autre que le θ schéma avec $\theta = 1/2-(\Delta x)^2/12\nu\Delta t$.

Exercice 2.2.2 Pour chacun des schémas de la Sous-section **2.2.1**, vérifier que l'erreur de troncature est bien du type annoncé dans le Tableau **2.1**. (On remarquera que tous ces schémas sont consistants sauf celui de DuFort-Frankel.)

Correction. Le calcul de l'erreur de troncature d'un schéma est souvent délicat à mener. Si on ne procède pas de manière soignée et méthodique, on peut aisément se retrouver englué dans un calcul inextricable, dont le coût croît exponentiellement en fonction de l'ordre à déterminer. Quelques règles simples permettent en général d'éviter ce travers. L'erreur de troncature se calcule en développant tous les termes du schéma au même point à l'aide des formules de Taylor. Le point choisi n'a évidemment aucune influence sur le résultat obtenu (l'ordre du schéma ne dépend pas du point considéré). Par contre, ce choix influe sur la taille du calcul qui en résulte. Il est recommandé de diviser le calcul en plusieurs étapes. Les développements calculés lors d'une étape pouvant être réutilisé à une autre. Il faut absolument utiliser l'équation vérifiée par la solution (par exemple remplacer les dérivées en temps par des dérivées en espace). Cela simplifie considérablement les calculs, et nous permet de déterminer l'ordre optimal du schéma. Enfin, il faut éviter à tout prix d'effectuer des calculs inutiles et ne pas manipuler des termes d'ordre non significatifs. Enfin, un petit truc classique consiste à utiliser les symétries du schéma, qui peuvent impliquer que les termes non nuls du développement sont nécessairement soit pairs, soit impairs.

Les schémas explicite, implicite et de Crank-Nicholson ne sont que des cas particuliers du θ-schéma. Ce dernier possède des termes communs avec le schéma à 6 points dont nous donnons le développement ci-dessous. Le schéma d'ordre le plus élevé étant le schéma à 6 points, d'ordre 2 en temps et 4 en espace, on peut donc négliger les termes en $\mathrm{o}((\Delta x)^4)$ et $\mathrm{o}((\Delta t)^2)$. On effectue nos développement au point (t_n, x_j) (un autre choix raisonnable consisterait à effectuer les développements au point $(t_n + \Delta t/2, x_j)$).

Remarque 2.2.1 *Une fonction $f(h)$ est un "petit o" de $g(h)$ ($f = o(g)$) si pour tout réel δ positif aussi petit soit-il, on a $|f(h)| \leq C\delta|g(h)|$ dès que $|h|$ est assez petit.*

Par développement de Taylor, puis en utilisant le fait que u est solution de l'équation de la chaleur, on a

$$\begin{aligned}\frac{u(t_{n+1}, x_j) - u(t_n, x_j)}{\Delta t} &= \\ &\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{(\Delta t)^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)(t_n, x_j) + \mathrm{o}((\Delta t)^2) \\ &= \left(\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu^2\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \nu^3\frac{(\Delta t)^2}{6}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}\right)(t_n, x_j) + \mathrm{o}((\Delta t)^2).\end{aligned}$$

De même,

$$\frac{u(t_n, x_{j-1}) - 2u(t_n, x_j) + u(t_n, x_{j+1})}{(\Delta x)^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{(\Delta x)^4}{6!}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}\right)(t_n, x_j) + \mathrm{o}((\Delta x)^4).$$

En remplaçant n par $n+1$ dans l'expression précédente, on obtient suite à un développement en (t_n, x_j) que

$$\begin{aligned}\frac{u(t_{n+1}, x_{j-1}) - 2u(t_{n+1}, x_j) + u(t_{n+1}, x_{j+1})}{(\Delta x)^2} &= \\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{(\Delta x)^4}{6!}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}\right)(t_n, x_j) \\ + \Delta t\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} + \frac{(\Delta x)^2}{12}\frac{\partial^5 u}{\partial t \partial x^4}\right)(t_n, x_j) \\ + \frac{(\Delta t)^2}{2}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2}\right)(t_n, x_j) + \mathrm{o}((\Delta x)^4 + (\Delta t)^2).\end{aligned}$$

De l'équation $\partial u/\partial t = \nu \partial^2 u/\partial x^2$, il vient

$$\begin{aligned}\frac{u(t_{n+1}, x_{j-1}) - 2u(t_{n+1}, x_j) + u(t_{n+1}, x_{j+1})}{(\Delta x)^2} &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{(\Delta x)^2}{12} + \nu\Delta t\right)\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right. \\ &+ \left.\left(2\frac{(\Delta x)^4}{6!} + \frac{\nu(\Delta t)(\Delta x)^2}{12} + \frac{\nu^2(\Delta t)^2}{2}\right)\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}\right)(t_n, x_j) + \mathrm{o}((\Delta x)^4 + (\Delta t)^2).\end{aligned}$$

1. Consistance des schémas explicite, implicite, θ-schéma et Crank-Nicholson.
Par combinaison linéaire des développements calculés précédemment,

$$\begin{aligned}\frac{u(t_{n+1}, x_j) - u(t_n, x_j)}{\Delta t} &+ \theta\nu\frac{-u(t_{n+1}, x_{j-1}) + 2u(t_{n+1}, x_j) - u(t_{n+1}, x_{j+1})}{(\Delta x)^2} \\ &+ (1-\theta)\nu\frac{-u(t_n, x_{j-1}) + 2u(t_n, x_j) - u(t_n, x_{j+1})}{(\Delta x)^2} \\ &= (1 - \theta - (1-\theta))\,\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ &+ \left(\frac{\nu\Delta t}{2} - \theta\left(\frac{(\Delta x)^2}{12} + \nu\Delta t\right) - (1-\theta)\frac{(\Delta x)^2}{12}\right)\nu\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \\ &+ \left(\frac{1}{6} - \frac{\theta}{2}\right)(\Delta t)^2\nu^3\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \mathrm{o}((\Delta t)^2 + (\Delta x)^2).\end{aligned}$$

Après simplification,

$$\begin{aligned}
&\frac{u(t_{n+1},x_j)-u(t_n,x_j)}{\Delta t}+\theta\nu\frac{-u(t_{n+1},x_{j-1})+2u(t_{n+1},x_j)-u(t_{n+1},x_{j+1})}{(\Delta x)^2}\\
&\qquad+(1-\theta)\nu\frac{-u(t_n,x_{j-1})+2u(t_n,x_j)-u(t_n,x_{j+1})}{(\Delta x)^2}\\
&=\left(\left(\left(\frac{1}{2}-\theta\right)\nu\Delta t-\frac{(\Delta x)^2}{12}\right)\nu\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\left(\frac{1}{6}-\frac{\theta}{2}\right)(\Delta t)^2\nu^3\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}\right)(t_n,x_j)\\
&\qquad+\mathrm{o}((\Delta t)^2+(\Delta x)^2).
\end{aligned}$$

Ainsi pour $\theta\neq 1/2$ (en particulier pour les schémas explicite et implicite), le θ-schéma est d'ordre un en temps et deux en espace, tandis que le schéma de Crank-Nicholson est d'ordre deux en temps et en espace.

2. Consistance du schéma à 6 points. Il nous reste à considérer le terme

$$\frac{u(t_{n+1},x_{j+1})-u(t_n,x_{j+1})}{\Delta t}+\frac{u(t_{n+1},x_{j-1})-u(t_n,x_{j-1})}{\Delta t}.$$

D'après le développement effectué au début de l'exercice, puis en développant le résultat obtenu en (t_n,x_j), on a

$$\begin{aligned}
&\frac{u(t_{n+1},x_{j+1})-u(t_n,x_{j+1})}{\Delta t}+\frac{u(t_{n+1},x_{j-1})-u(t_n,x_{j-1})}{\Delta t}\\
&\qquad=\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\nu\Delta t}{2}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{\nu^2(\Delta t)^2}{6}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}\right)(t_n,x_{j+1})\\
&\qquad\quad+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\nu\Delta t}{2}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{\nu^2(\Delta t)^2}{6}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}\right)(t_n,x_{j-1})+\mathrm{o}((\Delta t)^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&=\left(2\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\nu\Delta t}{2}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{\nu^2(\Delta t)^2}{6}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}\right)+\nu(\Delta x)^2\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{\nu\Delta t}{2}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}\right)\right.\\
&\qquad\left.+\frac{\nu(\Delta x)^4}{12}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}\right)(t_n,x_j)+\mathrm{o}((\Delta t)^2+(\Delta x)^4).
\end{aligned}$$

Soit,

$$\begin{aligned}
&\frac{u(t_{n+1},x_{j+1})-u(t_n,x_{j+1})}{\Delta t}+\frac{u(t_{n+1},x_{j-1})-u(t_n,x_{j-1})}{\Delta t}\\
&=2\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left(\nu^2\Delta t+\nu(\Delta x)^2\right)\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\left(\frac{\nu^3(\Delta t)^2}{3}+\frac{\nu^2\Delta t(\Delta x)^2}{2}+\frac{\nu(\Delta x)^4}{12}\right)\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}\\
&\qquad+\mathrm{o}((\Delta t)^2+(\Delta x)^4).
\end{aligned}$$

Par combinaison linéaire avec les autres développements effectués, on obtient (après simplification)

$$\begin{aligned}
&\frac{u(t_{n+1},x_{j+1})-u(t_n,x_{j+1})}{12\Delta t}+\frac{5(u(t_{n+1},x_j)-u(t_n,x_j))}{6\Delta t}\\
&\quad+\frac{u(t_{n+1},x_{j-1})-u(t_n,x_{j-1})}{12\Delta t}-\nu\frac{u(t_{n+1},x_{j-1})-2u(t_{n+1},x_j)+u(t_{n+1},x_{j+1})}{2(\Delta x)^2}\\
&\qquad-\nu\frac{u(t_n,x_{j-1})-2u(t_n,x_j)+u(t_n,x_{j+1})}{2(\Delta x)^2}\\
&\qquad\quad=\left(\frac{3}{6!}\nu(\Delta x)^4-\frac{\nu^3}{12}(\Delta t)^2\right)\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}+\mathrm{o}((\Delta x)^4+(\Delta t)^2).
\end{aligned}$$

Le schéma à 6 points est donc d'ordre 4 en espace et 2 en temps.
3. Consistance du schéma de DuFort-Frankel (**2.7**). On a

$$\frac{u(t_{n+1},x_j)-u(t_{n-1},x_j)}{2\Delta t}=\frac{\partial u}{\partial t}+\mathrm{o}\left(\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2\right)$$

et

$$\begin{aligned}
&\frac{-u(t_n,x_{j-1})+u(t_{n+1},x_j)+u(t_{n-1},x_j)-u(t_n,x_{j+1})}{(\Delta x)^2}\\
&=-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{(\Delta x)^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\mathrm{o}\left(\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2+(\Delta x)^2\right).
\end{aligned}$$

En combinant ces deux expressions, on en déduit que, si u est solution de l'équation de la chaleur,

$$\begin{aligned}
&\frac{u(t_{n+1},x_j)-u(t_{n-1},x_j)}{2\Delta t}\\
&+\nu\frac{-u(t_n,x_{j-1})+u(t_{n+1},x_j)+u(t_{n-1},x_j)-u(t_n,x_{j+1})}{(\Delta x)^2}\\
&=\left(\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2-\frac{(\Delta x)^2}{12}\right)\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\mathrm{o}\left(\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2+(\Delta x)^2\right).
\end{aligned}$$

Le schéma n'est pas consistant au sens classique, mais il l'est si on suppose que le rapport $\Delta t/\Delta x$ converge vers zéro. Un choix optimal de Δt en fonction de Δx pour avoir un schéma d'ordre élevé est de choisir Δt du même ordre que $(\Delta x)^2$. Dans ce cas, le schéma est d'ordre 2 en espace.
4. Consistance du schéma de Gear (**2.8**)

$$\begin{aligned}
&3u(t_{n+1},x_j)-4u(t_n,x_j)+u(t_{n-1},x_j)\\
&\qquad=\left(2(\Delta t)\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{2}{3}(\Delta t)^3\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)(t_{n+1},x_j)+\mathcal{O}((\Delta t)^4)
\end{aligned}$$

et

$$-u(t_{n+1}, x_{j-1}) + 2u(t_{n+1}, x_j) - u(t_{n+1}, x_{j+1}) \\ =\Big(- (\Delta x)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^4}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\Big)(t_{n+1}, x_j) + \mathcal{O}((\Delta x)^6).$$

En appliquant ces deux développements de Taylor à la solution u de l'équation de la chaleur, on obtient

$$\frac{3u(t_{n+1}, x_j) - 4u(t_n, x_j) + u(t_{n-1}, x_j)}{(\Delta x)^2} \\ + \nu \frac{-u(t_{n+1}, x_{j-1}) + 2u(t_{n+1}, x_j) - u(t_{n+1}, x_{j+1})}{2\Delta t} \\ = -\frac{\nu(\Delta x)^2}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{(\Delta t)^2}{3} \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \mathcal{O}((\Delta t)^3 + (\Delta x)^3).$$

Le schéma de Gear est donc d'ordre 2 en temps et en espace.

Exercice 2.2.3 Montrer que le schéma de Crank-Nicholson (2.2) (avec $\theta = 1/2$) est stable en norme L^∞ si $\nu\Delta t \leq (\Delta x)^2$, et que le schéma de DuFort-Frankel

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + \nu \frac{-u_{j-1}^n + u_j^{n+1} + u_j^{n-1} - u_{j+1}^n}{(\Delta x)^2} = 0, \tag{2.3}$$

est stable en norme L^∞ si $2\nu\Delta t \leq (\Delta x)^2$ (on applique aux deux schémas des conditions aux limites de type Dirichlet homogènes).

Correction. On va montrer que sous une condition CFL appropriée, le schéma de Crank-Nicholson vérifie le principe du maximum discret. Soit k et l tels que

$$u_k^{n+1} = M = \max_j u_j^{n+1} \text{ et } u_l^{n+1} = m = \min_j u^{n+1}.$$

Notons que M est positif ou nul et m négatif ou nul. On va montrer que

$$M \leq \max(0, \max_j u_j^n) \tag{2.4}$$

$$\text{et } \min(0, \min_j u_j^n) \leq m. \tag{2.5}$$

Dans un premier temps, on considère l'inégalité (2.4). Cette dernière est trivialement vérifiée si $M = 0$. On peut donc se restreindre au cas $M \neq 0$. Le maximum de u_j^{n+1} pour tout $j \in \{0, \cdots, N+1\}$ est atteint en un élément $k \in \{1, \cdots, N\}$ et d'après (2.2) avec $\theta = 1/2$,

$$\frac{M - u_k^n}{\Delta t} + \nu \frac{-u_{k-1}^n + 2u_k^n - u_{k+1}^n}{2(\Delta x)^2} \leq 0,$$

soit

$$M \leq \left(1 - \frac{\nu\Delta t}{(\Delta x)^2}\right) u_k^n + \frac{\nu\Delta t}{2(\Delta x)^2}(u_{k-1}^n + u_{k+1}^n).$$

Si
$$\nu\Delta t \leq (\Delta x)^2, \tag{2.6}$$
le terme de droite est une combinaison convexe des coordonnées de u^n, et le premier point de (2.4) est vérifié. La minoration (2.5) de m s'en déduit en remplaçant u^n par $-u^n$ et M par $-m$. Si la condition CFL (2.6) est vérifiée, le schéma de Crank-Nicholson vérifie le principe du maximum discret. En conséquence, il est stable pour la norme L^∞.

Le schéma de DuFort-Frankel (2.3) est défini par
$$\left(\frac{1}{2\Delta t}+\frac{\nu}{(\Delta x)^2}\right)u_j^{n+1}=\left(\frac{1}{2\Delta t}-\frac{\nu}{(\Delta x)^2}\right)u_j^{n-1}+\frac{\nu}{(\Delta x)^2}(u_{j-1}^n+u_{j+1}^n).$$
Si $2\nu\Delta t \leq (\Delta x)^2$, u_j^{n+1} est une combinaison convexe de u_j^{n-1}, u_{j-1}^n et u_{j+1}^n. Ainsi, il est stable pour la norme L^∞, c'est a dire
$$\|u^n\|_\infty \leq \max\left(\|u^0\|_\infty, \|u^1\|_\infty\right).$$

Exercice 2.2.4 Montrer que le θ-schéma (2.2) est stable en norme L^2 inconditionnellement si $1/2 \leq \theta \leq 1$, et sous la condition CFL $2(1-2\theta)\nu\Delta t \leq (\Delta x)^2$ si $0 \leq \theta < 1/2$.

Correction. Étudions la stabilité en norme L^2 du θ-schéma. Par application de la transformation de Fourier, il vient
$$\left(1+\frac{2\theta\nu\Delta t}{(\Delta x)^2}(1-\cos(2k\pi\Delta x))\right)\hat{u}^{n+1}(k)=$$
$$\left(1+\frac{2(\theta-1)\nu\Delta t}{(\Delta x)^2}(1-\cos(2k\pi\Delta x))\right)\hat{u}^n(k).$$
Ainsi, le schéma sera stable en norme L^2 dès que
$$\left|1+\frac{2(\theta-1)\nu\Delta t}{(\Delta x)^2}(1-\cos(2k\pi\Delta x))\right| \leq \left|1+\frac{2\theta\nu\Delta t}{(\Delta x)^2}(1-\cos(2k\pi\Delta x))\right| \tag{2.7}$$
pour tout k. Comme $1-\cos(2k\pi\Delta x) = 2\sin^2(k\pi\Delta x)$, on peut réécrire (2.7) sous la forme
$$\left|1-\frac{4\nu\Delta t\sin^2(k\pi\Delta x)}{(\Delta x)^2+4\theta\nu\Delta t\sin^2(k\pi\Delta x)}\right| \leq 1$$
ou encore
$$0 \leq \frac{4\nu\Delta t\sin^2(k\pi\Delta x)}{(\Delta x)^2+4\theta\nu\Delta t\sin^2(k\pi\Delta x)} \leq 2.$$
Comme θ est positif, cette condition est équivalente à
$$(\Delta x)^2 \geq 2(1-2\theta)\nu\Delta t\sin^2(k\pi\Delta x).$$
Cette dernière relation est vérifiée pour tout k dès que $(1-2\theta) \leq 0$ ou $(\Delta x)^2 \geq 2(1-2\theta)\nu\Delta t$.

Exercice 2.2.5 Montrer que le schéma à 6 points (2.1) est inconditionnellement stable en norme L^2.

Correction. Par transformation de Fourier appliquée au schéma à 6 points (2.1), on obtient

$$\left(\frac{\cos(2k\pi\Delta x)}{6\Delta t}+\frac{5}{6\Delta t}\right)(\hat{u}^{n+1}-\hat{u}^n)+\frac{\nu}{(\Delta x)^2}(4-\cos(2k\pi\Delta x))(\hat{u}^{n+1}+\hat{u}^n)=0,$$

c'est-à-dire

$$\left(5+\cos(2k\pi\Delta x)+\frac{6\nu\Delta t}{(\Delta x)^2}(4-\cos(2k\pi\Delta x))\right)\hat{u}^{n+1}=\left(5+\cos(2k\pi\Delta x)-\frac{6\nu\Delta t}{(\Delta x)^2}(4-\cos(2k\pi\Delta x))\right)\hat{u}^n.$$

Le schéma est donc L^2-stable dès que

$$5+\cos(2k\pi\Delta x)+\frac{6\nu\Delta t}{(\Delta x)^2}(4-\cos(2k\pi\Delta x))\geq\left|5+\cos(2k\pi\Delta x)-\frac{6\nu\Delta t}{(\Delta x)^2}(4-\cos(2k\pi\Delta x))\right|,$$

relation qui est trivialement vérifiée indépendamment de Δx et Δt.

Exercice 2.2.6 Montrer que le schéma de Gear

$$\frac{3u_j^{n+1}-4u_j^n+u_j^{n-1}}{2\Delta t}+\nu\frac{-u_{j-1}^{n+1}+2u_j^{n+1}-u_{j+1}^{n+1}}{(\Delta x)^2}=0 \qquad (2.8)$$

est inconditionnellement stable et donc convergent en norme L^2.

Correction. En appliquant la transformation de Fourier au schéma de Gear (2.8), on obtient

$$\left(3+c\sin^2(k\pi\Delta x)\right)\hat{u}^{n+1}=4\hat{u}^n-\hat{u}^{n-1}, \qquad (2.9)$$

où $c=\frac{8\nu\Delta t}{(\Delta x)^2}$. On introduit le polynôme (dépendant implicitement de k et c)

$$P(X)=(3+c\sin^2(k\pi\Delta x))X^2-4X+1.$$

On note $\lambda_1(k,c)$ et $\lambda_2(k,c)$ les racines (éventuellement complexes) de P et on pose $\Delta(k,c)=(\lambda_2(k,c)-\lambda_1(k,c))^2$. Le discriminant de P vaut précisément $(3+c\sin^2(k\pi\Delta x))^2\Delta(k,c)$ et a donc le même signe que $\Delta(k,c)$. Les solutions de (2.9) s'expriment explicitement en fonction de $\hat{u}^0(k)$ et $\hat{u}^1(k)$

$$\hat{u}^n(k)=\begin{cases}\left(\frac{\lambda_2\lambda_1^n-\lambda_1\lambda_2^n}{\lambda_2-\lambda_1}\right)\hat{u}^0(k)+\left(\frac{\lambda_2^n-\lambda_1^n}{\lambda_2-\lambda_1}\right)\hat{u}^1(k) & \text{si } \Delta(k,c)\neq 0,\\ (1-n)\lambda_1^n\hat{u}^0(k)+n\lambda_1^{n-1}\hat{u}^1(k) & \text{si } \Delta(k,c)=0.\end{cases}$$

Une condition nécessaire de stabilité inconditionnelle est donc

$$|\lambda_1(k,c)| \leq 1 \text{ et } |\lambda_2(k,c)| \leq 1 \tag{2.10}$$

pour tout entier k et toute constante positive c. C'est justement la condition nécessaire de stabilité de Von Neumann !

Cependant, cette condition n'est pas suffisante. En particulier, si le polynôme P admet une racine double (i.e. $\Delta(k,c) = 0$) et si cette racine est de module un, alors $|\hat{u}^n(k,c)|$ n'est pas borné, sa croissance étant linéaire en fonction de n. D'autre part, à supposer que $\Delta(k,c) \neq 0$, il n'existe pas de majoration évidente du module de $\hat{u}^n(k,c)$ uniforme par rapport à c et k, le rapport $|\lambda_2(k,c) - \lambda_1(k,c)|^{-1}$ convergeant vers l'infini lorsque $\Delta(k,c)$ tend vers zéro. Afin que le schéma soit stable, il faut s'assurer que lorsque $\Delta(k,c)$ est proche de zéro, $|\lambda_1(k,c)|$ et $|\lambda_2(k,c)|$ restent strictement plus petits qu'une constante inférieure à 1. Plus précisément, pour que le schéma soit stable, il suffit de prouver qu'il existe deux réels $\delta > 0$ et $\beta < 1$ tels que pour tout entier k et tout réel positif c, on ait

$$|\Delta(k,c)| \leq \delta \Longrightarrow \max(|\lambda_1(k,c)|, |\lambda_2(k,c)|) < \beta < 1. \tag{2.11}$$

En effet, supposons que les conditions (2.10) et (2.11) soient vérifiées et posons $C(\beta) = \max_n n\beta^{n-1}$: comme $0 < \beta < 1$, $C(\beta) < +\infty$. Afin d'étudier la stabilité du schéma, on considère trois cas différents suivant la valeur de $\Delta(k,c)$: $|\Delta(k,c)|$ grand, $|\Delta(k,c)|$ petit et $\Delta(k,c)$ nul. Si $|\Delta(k,c)| \geq \delta$, alors

$$\left|\frac{\lambda_2^n - \lambda_1^n}{\lambda_2 - \lambda_1}\right| \leq 2/\sqrt{\delta}\ .\ ?\,?\,?\,?\,?$$

Si $0 < |\Delta(k,c)| < \delta$, alors

$$\left|\frac{\lambda_2^n - \lambda_1^n}{\lambda_2 - \lambda_1}\right| = \left|\sum_{p=0}^{n-1} \lambda_1^p \lambda_2^{n-1-p}\right| \leq n \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|)^{n-1} \leq C(\beta)\ ,$$

enfin si $\Delta(k,c) = 0$, $n|\lambda_1|^{n-1} \leq C(\beta)$. De ces trois inégalités, on en déduit que

$$|\hat{u}^n(k)| < K(|\hat{u}^0(k)| + |\hat{u}^1(k)|)$$

où $K = 1 + (C(\beta) + 2/\sqrt{\delta})$. Ainsi, $\|\hat{u}^n\|_{L^2} \leq \sqrt{2}K(\|u^0\|_{L^2} + \|u^1\|_{L^2})$.

Reste à prouver que les conditions de stabilité (2.10) et (2.11) sont satisfaites. Tout d'abord, vérifions que les modules des racines du polynôme $P(X)$ sont effectivement inférieurs à 1 (condition de Von Neumann). Si le discriminant est négatif, les racines sont conjuguées l'une de l'autre. Leur module est alors égal à $(3 + c\sin^2(k\pi\Delta x))^{-1/2}$ qui est en effet inférieur à un. D'autre part, si λ est une racine réelle de $P(X)$, on a

$$3\lambda^2 - 4\lambda + 1 = -c\sin^2(k\pi\Delta x)\lambda^2 \leq 0$$

ou encore

$$(\lambda - 1)(3\lambda - 1) \leq 0.$$

On en déduit que toute racine réelle de $P(X)$ appartient à l'intervalle $[1/3, 1]$ et est donc bien de module inférieur ou égal à un. Reste à vérifier la condition (2.11). On suppose que λ_2 désigne la plus grand valeur propre du polynôme P. Ainsi $\lambda_2 = \lambda_1 + \sqrt{\Delta}$. Or on a $\lambda_1 + \lambda_2 = 4(3 + c\sin^2(k\pi\Delta x))^{-1}$. Ainsi,

$$2\lambda_2 = 4(3 + c\sin^2(k\pi\Delta x))^{-1} + \sqrt{\Delta} \leq 4/3 + \sqrt{\Delta}.$$

Ainsi, dès que $\Delta \leq 1/9$, on a $\lambda_2 \leq 2/3 + 1/6 = 5/6 < 1$. La condition (2.11) est donc vérifiée.

Exercice 2.2.7 Montrer que le schéma de DuFort-Frankel (2.3) est inconditionnellement stable en norme L^2. Montrer que, si on fait tendre Δt et Δx vers 0 de telle manière que le rapport $\Delta t/(\Delta x)^2$ reste majoré, alors le schéma de DuFort-Frankel est convergent. (On dit qu'il est "conditionnellement" convergent.)

Correction. Par transformation de Fourier, on obtient que

$$\hat{u}^{n+1} - \hat{u}^{n-1} + \frac{2\nu\Delta t}{(\Delta x)^2}(-2\hat{u}^n\cos(2k\pi\Delta x) + \hat{u}^{n+1} + \hat{u}^{n-1}) = 0.$$

Soit encore

$$(1 + c)\hat{u}^{n+1}(k) - 2c\cos(2k\pi\Delta x)\hat{u}^n(k) - (1 - c)\hat{u}^{n-1}(k) = 0,$$

où

$$c = \frac{2(\Delta t)\nu}{(\Delta x)^2}.$$

Afin d'établir la stabilité, on procède comme pour l'exercice 2.2.6. Considérons le polynôme

$$P(X) = (1 + c)X^2 - 2c\cos(2k\pi\Delta x)X - (1 - c)$$

La stabilité est assurée si (2.10) et (2.11) sont vérifiées, c'est à dire si les modules des racines de P sont inférieures à 1 et si elles restent majorées par une constante strictement inférieure à 1 dès que les racines du polynôme sont suffisamment proches. Vérifions tout d'abord le premier point. Si le discriminant de P est négatif, P admet des racines complexes conjuguées et

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = \left|\frac{1 - c}{1 + c}\right|^{1/2} \leq 1.$$

Si le discriminant de P est positif, P admet des racines réelles. Pour chacune d'elles on a

$$(1 + c)\lambda^2 - 2c\cos(2k\pi\Delta x)\lambda - (1 - c) = 0,$$

d'où

$$\begin{aligned}(1 + c)\lambda^2 - (1 - c) &= 2c\cos(2k\pi\Delta x)\lambda \\ &\leq c(\lambda^2 + \cos^2(2k\pi\Delta x)) \\ &\leq c(\lambda^2 + 1)\end{aligned}$$

On en déduit que $\lambda^2 \leq 1$. Donc (2.10) est vérifée. Passons à la vérification de (2.11). Supposons que λ_2 soit la plus grande valeur propre, on a alors $\lambda_2 = \lambda_1 + \sqrt{\Delta}$ où $\Delta = (\lambda_1 - \lambda_2)^2$. Or

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 2\frac{c\cos(2k\pi\Delta x)}{1+c}.$$

On a donc

$$\lambda_2 = \frac{c\cos(2k\pi\Delta x)}{1+c} + \sqrt{\Delta}/2$$

et

$$|\lambda_2| \leq \frac{c}{1+c} + \sqrt{\Delta}/2 = 1 + \sqrt{\Delta} - \frac{1}{1+c}.$$

Si le rapport $\Delta t/(\Delta x)^2$ reste borné, c est majoré par une constante $M > 0$. On a donc dans ce cas

$$|\lambda_2| =\leq 1 + \sqrt{\Delta} - (1+M)^{-1}.$$

Pour Δ suffisament petit, le membre de droite est strictement plus petit que 1, ce qui établit la deuxième condition de stabilité (2.11).

Le schéma est donc stable en norme L^2 pourvu que le rapport $\Delta t/(\Delta x)^2$ reste borné. Enfin, d'après le Théorème de Lax, la stabilité combinée à la consistance implique la convergence.

Exercice 2.2.8 Montrer que le schéma explicite

$$\frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^n}{\Delta t} + \nu\frac{-u_{j-1,k}^n + 2u_{j,k}^n - u_{j+1,k}^n}{(\Delta x)^2} + \nu\frac{-u_{j,k-1}^n + 2u_{j,k}^n - u_{j,k+1}^n}{(\Delta y)^2} = 0 \qquad (2.12)$$

est stable en norme L^∞ (et même qu'il vérifie le principe du maximum) sous la condition CFL

$$\frac{\nu\Delta t}{(\Delta x)^2} + \frac{\nu\Delta t}{(\Delta y)^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Correction. Le schéma explicite (2.12) est défini par

$$u_{j,k}^{n+1} = \left(1 - 2\Big(\frac{\nu\Delta t}{(\Delta x)^2} + \frac{\nu\Delta t}{(\Delta u)^2}\Big)\right)u_{j,k}^n + \frac{\nu\Delta t}{(\Delta x)^2}(u_{j-1,k}^n + u_{j+1,k}^n) + \frac{\nu\Delta t}{(\Delta y)^2}(u_{j,k-1}^n + u_{j,k+1}^n).$$

Si

$$\frac{\nu\Delta t}{(\Delta x)^2} + \frac{\nu\Delta t}{(\Delta y)^2} \leq 1/2\ ,$$

$u_{j,k}^{n+1}$ est une combinaison convexe de coordonnées de u^n et donc

$$|u_{j,k}^{n+1}| \leq \|u^n\|_\infty.$$

Exercice 2.2.9 Montrer que le schéma de Peaceman-Rachford

$$\frac{u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j,k}^{n}}{\Delta t} + \nu \frac{-u_{j-1,k}^{n+1/2} + 2u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j+1,k}^{n+1/2}}{2(\Delta x)^2} + \nu \frac{-u_{j,k-1}^{n} + 2u_{j,k}^{n} - u_{j,k+1}^{n}}{2(\Delta y)^2} = 0$$

$$\frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^{n+1/2}}{\Delta t} + \nu \frac{-u_{j-1,k}^{n+1/2} + 2u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j+1,k}^{n+1/2}}{2(\Delta x)^2} + \nu \frac{-u_{j,k-1}^{n+1} + 2u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k+1}^{n+1}}{2(\Delta y)^2} = 0$$

est précis d'ordre 2 en espace et temps et inconditionnellement stable en norme L^2 (pour des conditions aux limites de périodicité dans chaque direction).

Correction.

1. Consistance

En effectuant la soustraction des deux équations définissant le schéma, on obtient l'expression de $u^{n+1/2}$ en fonction de u^n et u^{n+1}.

$$u_{j,k}^{n+1/2} = \frac{u_{j,k}^{n+1} + u_{j,k}^{n}}{2} + \frac{\nu \Delta t}{4(\Delta y)^2}(u_{j,k-1}^{n} - 2u_{j,k}^{n} + u_{j,k+1}^{n} - u_{j,k-1}^{n+1} + 2u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k+1}^{n+1}).$$

En substituant l'expression de $u^{n+1/2}$ dans l'une des équations du schéma, on détermine la relation reliant u^{n+1} à u^n. On pourrait effectuer le calcul explicite de cette expression, puis établir la consistance. Cependant, cela constitue un calcul fastidieux qu'on peut éviter. On introduit plutôt la fonction intermédiaire, qui ressemble à $u_{j,k}^{n+1/2}$,

$$\begin{aligned} v(t,x,y) = {} & \frac{u(t+\Delta t,x,y) + u(t,x,y)}{2} \\ & + \frac{\nu \Delta t}{4(\Delta y)^2}\Big(u(t,x,y-\Delta y) - 2u(t,x,y) + u(t,x,y+\Delta y) \\ & - u(t+\Delta t,x,y-\Delta y) + 2u(t+\Delta t,x,y) - u(t+\Delta t,x,y+\Delta y)\Big). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Pour toute solution u de l'équation de la chaleur, l'erreur de troncature (venant de la première équation du schéma) est

$$\begin{aligned} E(u) = {} & \frac{v(t,x,y) - u(t,x,y)}{\Delta t} + \nu \frac{-v(t,x-\Delta x,y) + 2v(t,x,y) - v(t,x+\Delta x,y)}{2(\Delta x)^2} \\ & + \nu \frac{-u(t,x,y-\Delta y) + 2u(t,x,y) - u(t,x,y+\Delta y)}{2(\Delta y)^2}, \end{aligned}$$

où v est définie par (2.13). Par développement de Taylor, on établit que

$$\begin{aligned} v = {} & u + \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{(\Delta t)^2}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nu \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial y^2}\right) + \frac{(\Delta t)^3}{24}\left(2\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} - 3\nu \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial y^2}\right) \\ & + \mathrm{o}\left((\Delta t)^3 + (\Delta t)(\Delta y)^2\right), \end{aligned}$$

puis que

$$\begin{aligned}E(u) =&\frac{v-u}{\Delta t} - \frac{\nu}{2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^2}{12}\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{(\Delta y)^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right) + \mathrm{o}((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2)) \\ =&\frac{\nu^3(\Delta t)^2}{24}\Delta\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} - \Delta^2 u\right) - \frac{\nu}{24}\left((\Delta x)^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + (\Delta y)^2\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right) \\ &+ \mathrm{o}((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta t)^2),\end{aligned}$$

où Δ (seul) désigne le Laplacien. Le schéma est donc d'ordre 2 en espace et en temps.
2. Étude de la stabilité L^2

En appliquant la transformation de Fourier au schéma, on en déduit que

$$\hat{u}^{n+1/2} = \frac{1 - 2\frac{\nu\Delta t}{(\Delta y)^2}\sin^2(l\pi\Delta y)}{1 + 2\frac{\nu\Delta t}{(\Delta x)^2}\sin^2(k\pi\Delta x)}\hat{u}^n$$

et

$$\hat{u}^{n+1} = \frac{1 - 2\frac{\nu\Delta t}{(\Delta x)^2}\sin^2(k\pi\Delta x)}{1 + 2\frac{\nu\Delta t}{(\Delta y)^2}\sin^2(l\pi\Delta y)}\hat{u}^{n+1/2}.$$

Ainsi, $\hat{u}^{n+1}(k,l) = A(k,l)\hat{u}^n(k,l)$ où

$$A(k,l) = \left(\frac{1 - 2\frac{\nu\Delta t}{(\Delta y)^2}\sin^2(l\pi\Delta y)}{1 + 2\frac{\nu\Delta t}{(\Delta y)^2}\sin^2(l\pi\Delta y)}\right)\left(\frac{1 - 2\frac{\nu\Delta t}{(\Delta x)^2}\sin^2(k\pi\Delta x)}{1 + 2\frac{\nu\Delta t}{(\Delta x)^2}\sin^2(k\pi\Delta x)}\right).$$

Comme pour tout $x \geq 0$, $|(1-x)/(1+x)| \leq 1$, on a $|A(k,l)| \leq 1$. Le schéma est inconditionnellement stable en norme L^2.

Exercice 2.2.10 Montrer que le schéma de directions alternées

$$\frac{u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j,k}^n}{\Delta t} + \nu\frac{-u_{j-1,k}^{n+1/2} + 2u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j+1,k}^{n+1/2}}{2(\Delta x)^2} + \nu\frac{-u_{j-1,k}^n + 2u_{j,k}^n - u_{j+1,k}^n}{2(\Delta x)^2} = 0$$

$$\frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^{n+1/2}}{\Delta t} + \nu\frac{-u_{j,k-1}^{n+1} + 2u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k+1}^{n+1}}{2(\Delta y)^2} + \nu\frac{-u_{j,k-1}^{n+1/2} + 2u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j,k+1}^{n+1/2}}{2(\Delta y)^2} = 0 \tag{2.14}$$

est précis d'ordre 2 en espace et temps et inconditionnellement stable en norme L^2 (pour des conditions aux limites de périodicité dans chaque direction).

Correction.
1. Étude de la consistance

Le schéma se décompose en deux étapes

$$\left(\frac{\mathrm{Id}}{\Delta t} - \frac{\nu}{2}M_y\right)u^{n+1/2} - \left(\frac{\mathrm{Id}}{\Delta t} + \frac{\nu}{2}M_y\right)u^n = 0$$

et

$$\left(\frac{\mathrm{Id}}{\Delta t} - \frac{\nu}{2}M_x\right)u^{n+1} - \left(\frac{\mathrm{Id}}{\Delta t} + \frac{\nu}{2}M_x\right)u^{n+1/2} = 0,$$

où

$$(M_x v)_{j,k} = \frac{v_{j+1,k} - 2v_{j,k} + v_{j-1,k}}{(\Delta x)^2}$$

et

$$(M_y v)_{j,k} = \frac{v_{j,k+1} - 2v_{j,k} + v_{j,k-1}}{(\Delta y)^2}.$$

Afin d'appliquer la définition de la consistance donnée dans le cours, il faut exhiber la relation reliant u^{n+1} à u^n. Il faut donc supprimer l'inconnue intermédiaire $u^{n+1/2}$ des équations définissant le schéma numérique. A cet effet, il suffit de multiplier la deuxième équation par $\left(\frac{\mathrm{Id}}{\Delta t} - \frac{\nu}{2} M_y\right)$ et de constater que cette matrice commute avec $\left(\frac{\mathrm{Id}}{\Delta t} + \frac{\nu}{2} M_x\right)$. Cette propriété de commutation est l'analogue discret de la commutation des opérateurs de dérivations dans le cas continu. On peut s'en convaincre en constatant que M_x et M_y n'agissent pas sur les mêmes indices, on plus simplement en comparant $M_x(M_y v)$ et $M_y(M_x v)$. On vérifie à la main que

$$\begin{aligned}(M_x(M_y v))_{j,k} = (M_y(M_x v))_{j,k} = \\ (\Delta x)^{-2}(\Delta y)^{-2}\Big(& v_{j+1,k+1} + 4v_{j,k} + v_{j-1,k-1} + (v_{j-1,k+1} + v_{j+1,k-1}) \\ & - 2(v_{j,k+1} + v_{j+1,k} + v_{j,k-1} + v_{j-1,k})\Big).\end{aligned}$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{Id} - \frac{\nu\Delta t}{2} M_y\right)\left(\mathrm{Id} - \frac{\nu\Delta t}{2} M_x\right) u^{n+1} = \\ \left(\mathrm{Id} + \frac{\nu\Delta t}{2} M_x\right)\left(\mathrm{Id} - \frac{\nu\Delta t}{2} M_y\right) u^{n+1/2}.\end{aligned}$$

D'après la première équation du schéma, il vient

$$\begin{aligned}(\Delta t)^{-1}\left(\mathrm{Id} - \frac{\nu\Delta t}{2} M_y\right)\left(\mathrm{Id} - \frac{\nu\Delta t}{2} M_x\right) u^{n+1} - \\ (\Delta t)^{-1}\left(\mathrm{Id} + \frac{\nu\Delta t}{2} M_x\right)\left(\mathrm{Id} + \frac{\nu\Delta t}{2} M_y\right) u^{n} = 0.\end{aligned}$$

Pour toute fonction v, on note $M_y(v)$ la fonction définie par

$$M_y(v)(t,x,y) = \frac{v(t,x,y+\Delta y) - 2v(t,x,y) + v(t,x,y-\Delta y)}{(\Delta y)^2}.$$

On définit de même la fonction $M_x(v)$ en échangeant les rôles respectifs de x et y. De plus, on note

$$\tau(v)(t,x,y) = v(t+\Delta t,x,y).$$

En utilisant ces notations, l'erreur de troncature est donc

$$\begin{aligned}E(u) = (\Delta)^{-1}\left(\mathrm{Id} - \frac{\nu\Delta t}{2} M_y\right)\left(\mathrm{Id} - \frac{\nu\Delta t}{2} M_x\right)(\tau(v)) \\ - (\Delta t)^{-1}\left(\mathrm{Id} + \frac{\nu\Delta t}{2} M_y\right)\left(\mathrm{Id} + \frac{\nu\Delta t}{2} M_x\right)(v).\end{aligned}$$

Après simplification, on obtient que l'erreur de troncature est

$$E(u) = (\Delta t)^{-1}(\tau(u) - u) - \frac{\nu}{2}(M_x + M_y)(\tau(u) + u) + \nu^2 \frac{\Delta t}{4} M_x M_y (\tau(u) - u).$$

En effectuant un développement de Taylor en (t, x, y), on montre que

$$\tau(v) = v + \Delta t \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\Delta t^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \mathrm{o}(\Delta t^3)$$

et que

$$M_x(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^2)}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + o(\Delta x^2).$$

En substituant ces expressions dans celle de la troncature, on obtient

$$E(u) = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\Delta t^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} - \frac{\nu}{2}(M_x + M_y)\left(2u + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) + \nu^2 \frac{\Delta t^2}{4} M_x M_y \frac{\partial u}{\partial t} + \mathrm{o}(\Delta t^2)$$

et

$$E(u) = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\Delta t^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} - \nu\left(\Delta u + \frac{\Delta x^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\Delta y^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right) - \nu \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\Delta u) - \nu \frac{\Delta t^2}{4}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\Delta u) + \nu^2 \frac{\Delta t^2}{4}\frac{\partial^5 v}{\partial^2 x \partial^2 y \partial t} + \mathrm{o}(\Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2).$$

On en déduit que

$$E(u) = \nu^3 \Delta t^2 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4}\right)\Delta^{(3)} v + \frac{\nu^3 (\Delta t)^2}{4}\frac{\partial^4 \Delta u}{\partial x^2 \partial y^2} - \nu \frac{\Delta x^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \nu \frac{\Delta y^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + \mathrm{o}(\Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2),$$

et enfin que

$$E(u) = \nu^3 (\Delta t)^2 \left(\frac{1}{4}\frac{\partial^4 \Delta v}{\partial x^2 \partial y^2} - \frac{1}{12}\Delta^{(3)} v\right) - \nu \frac{\Delta x^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \nu \frac{\Delta y^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + \mathrm{o}(\Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2).$$

Ainsi, le schéma est d'ordre 2 en temps et en espace.
2. Étude de la stabilité L^2

En appliquant la transformation de Fourier au schéma, on établit que

$$\hat{u}^{n+1/2} = \frac{1 - \frac{\nu \Delta t}{(\Delta x)^2}\sin^2(\pi k \Delta x)}{1 + \frac{\nu \Delta t}{(\Delta x)^2}\sin^2(\pi k \Delta x)}\hat{u}^n$$

et

$$\hat{u}^{n+1} = \frac{1 - \frac{\nu \Delta t}{(\Delta y)^2}\sin^2(\pi l \Delta y)}{1 + \frac{\nu \Delta t}{(\Delta y)^2}\sin^2(\pi l \Delta y)}\hat{u}^{n+1/2}.$$

Rappelons que pour tout $x \geq 0$, $\left|\frac{1-x}{1+x}\right| \leq 1$. Ainsi, $|\hat{u}^{n+1}| \leq |\hat{u}^{n+1/2}| \leq |\hat{u}^n|$ et le schéma est inconditionnellement stable L^2.

Exercice 2.3.1 Montrer que le schéma implicite centré

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}+V\frac{u_{j+1}^{n+1}-u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x}=0 \tag{2.15}$$

est consistant avec l'équation d'advection (**2.32**), précis à l'ordre 1 en temps et 2 en espace, inconditionnellement stable en norme L^2, donc convergent.

Correction.
1. Consistance

L'erreur de troncature est

$$\begin{aligned} E(u) &= \frac{u(t+\Delta t,x)-u(t,x)}{\Delta t}+V\frac{u(t+\Delta t,x+\Delta x)-u(t+\Delta t,x-\Delta x)}{2\Delta x} \\ &= \frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+V\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\Delta x^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)+\mathrm{o}(\Delta t+(\Delta x)^2) \\ &= \frac{\Delta t}{2}V^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{V\Delta x^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\mathrm{o}(\Delta t+(\Delta x)^2). \end{aligned}$$

Le schéma est donc d'ordre un en temps et deux en espace.
2. Précision

Pour la stabilité L^2, l'analyse de Fourier conduit à

$$\hat{u}^{n+1}(k)=\left(1+i\frac{V\Delta t}{\Delta x}\sin(2\pi k\Delta x)\right)^{-1}\hat{u}^n(k)=A(k)\hat{u}^n(k).$$

On vérifie alors que le module du facteur d'amplification est toujours plus petit que 1

$$|A(k)|^2=\left(1+\left(\frac{V\Delta t}{\Delta x}\sin(2\pi k\Delta x)\right)^2\right)^{-1}\le 1\ .$$

Le schéma est inconditionnellement stable. La convergence s'obtient alors par le Théorème de Lax **2.2.20**.

Exercice 2.3.2 Montrer que le schéma de Lax Wendroff

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}+V\frac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2\Delta x}-\left(\frac{V^2\Delta t}{2}\right)\frac{u_{j-1}^n-2u_j^n+u_{j+1}^n}{(\Delta x)^2}=0. \tag{2.16}$$

est stable et convergent en norme L^2 si $|V|\Delta t\le\Delta x$.

Correction. Il suffit de montrer la stabilité en norme L^2 afin d'en déduire la convergence par le théorème de Lax. En appliquant la transformation de Fourier au schéma de Lax-Wendroff (2.16), on obtient

$$\hat{u}^{n+1}(k)=A(k)\hat{u}^n(k)$$

où

$$A(k)=1-2\left(\frac{V\Delta t}{\Delta x}\right)^2\sin^2(k\pi\Delta x)-i\frac{V\Delta t}{\Delta x}\sin(2k\pi\Delta x)$$

Le schéma est stable en norme L^2 dès que $|A(k)| \leq 1$. On montre aisément que

$$|A(k)|^2 = 1 - 4\sin^4(k\pi\Delta x)\left(\frac{V\Delta t}{\Delta x}\right)^2\left(1 - \left(\frac{V\Delta t}{\Delta x}\right)^2\right).$$

Ainsi, le schéma est stable et convergent dès que

$$\frac{|V|\Delta t}{\Delta x} \leq 1.$$

Exercice 2.3.3 Montrer que le schéma de Lax-Friedrichs préserve le principe du maximum discret si la condition CFL $|V|\Delta t \leq \Delta x$ est satisfaite, tandis que le schéma de Lax-Wendroff ne le préserve pas sauf si $V\Delta t/\Delta x$ vaut $-1, 0$, ou 1.

Correction. 1. Schéma de Lax-Friedrichs

$$u_j^{n+1} = \left(\frac{1}{2} + \frac{V\Delta t}{2\Delta x}\right)u_{j+1}^n + \left(\frac{1}{2} - \frac{V\Delta t}{2\Delta x}\right)u_{j-1}^n.$$

Ainsi, u_j^{n+1} est une combinaison linéaire convexe de u_{j+1}^n et u_j^n dès que $|V|\Delta t \leq \Delta x$. Sous cette condition, le schéma vérifie le principe du maximum discret.
2. Schéma de Lax-Wendroff

$$u_j^{n+1} = \frac{V\Delta t}{2\Delta x}\left(\frac{V\Delta t}{\Delta x} - 1\right)u_{j+1}^n + \left(1 - \left(\frac{V\Delta t}{\Delta x}\right)^2\right)u_j^n + \frac{V\Delta t}{2\Delta x}\left(\frac{V\Delta t}{\Delta x} + 1\right)u_{j-1}^n.$$

Le schéma préserve le principe du maximum discret si chacun des coefficients apparaissant dans le terme de droite est positif, c'est-à-dire si $V\Delta t/\Delta x = -1$, 0 ou 1. Dans le cas contraire, l'un des coefficient est négatif. Soit k un indice quelconque. On pose $u_j^0 = 0$ pour tout $j \neq k$ et $u_k^0 = 1$. D'après le schéma, on a $u_j^1 = 0$ pour tout $j \neq k-1, k, k+1$, de plus,

$$u_{k-1}^1 = \frac{V\Delta t}{2\Delta x}\left(\frac{V\Delta t}{\Delta x} - 1\right), \quad u_k^1 = \left(1 - \left(\frac{V\Delta t}{\Delta x}\right)^2\right)$$

et

$$u_{k+1}^1 = \frac{V\Delta t}{2\Delta x}\left(\frac{V\Delta t}{\Delta x} + 1\right).$$

Si $V\Delta t/\Delta x$ n'est égal ni à -1, ni à 0 ni à 1, l'un de ces termes est strictement négatif. En conséquence,

$$\min\left(0, \min_j u_j^0\right) = 0 > \min_j u_j^1$$

et le schéma ne vérifie pas le principe du maximum discret.

Exercice 2.3.4 Montrer que le schéma de Lax-Wendroff (2.16) est le seul schéma précis à l'ordre 2 en espace et temps qui soit du type

$$u_j^{n+1} = \alpha u_{j-1}^n + \beta u_j^n + \gamma u_{j+1}^n,$$

où α, β, γ dépendent seulement de $V\Delta t/\Delta x$.

Correction. L'erreur de troncature est

$$E = (\Delta t)^{-1} \left(u(x_j, t_{n+1}) - \alpha u(x_{j-1}, t_n) - \beta u(t_n, x_j) - \gamma u(t_n, x_{j+1}) \right).$$

En effectuant un développement de Taylor en (x_j, t_n), on montre que

$$\begin{aligned} E = (\Delta t)^{-1} \left(1 - (\alpha + \beta + \gamma)\right) u + \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\Delta x}{\Delta t}(\alpha - \gamma)\frac{\partial u}{\partial x} \\ + \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\alpha + \gamma}{2}\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathcal{O}\left((\Delta t)^2 + (|\alpha| + |\gamma|)\frac{(\Delta x)^3}{\Delta t} \right). \end{aligned}$$

Si u est solution de l'équation d'advection,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -V \frac{\partial u}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} E = (\Delta t)^{-1} \left(1 - (\alpha + \beta + \gamma)\right) u - \frac{V}{c}\left(c - (\alpha - \gamma)\right)\frac{\partial u}{\partial x} \\ + \frac{V^2 \Delta t}{2c^2}\left(c^2 - (\alpha + \gamma)\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathcal{O}\left((\Delta t)^2 \left(1 + \frac{|\alpha| + |\gamma|}{c^3}\right)\right), \end{aligned} \quad (2.17)$$

où $c = V\Delta t/\Delta x$. Pour un rapport $\Delta t/\Delta x$ fixé, c est constant. Si le schéma est d'ordre 2 en temps et en espace, l'erreur de troncature doit être d'ordre deux en temps (à c constant), ainsi d'après l'expression de l'erreur de troncature, il vient

$$\begin{aligned} 1 - (\alpha + \beta + \gamma) &= 0 \\ c - \alpha + \gamma &= 0 \\ c^2 - (\alpha + \gamma) &= 0. \end{aligned}$$

D'où l'on déduit que

$$\begin{aligned} \alpha &= c(1 + c)/2 \\ \beta &= 1 - c^2 \\ \gamma &= c(c - 1)/2. \end{aligned}$$

On retrouve donc le schéma de Lax-Wendroff. Enfin, comme $|\alpha| + |\gamma| = \mathcal{O}(c + c^2)$, d'après (2.17), le schéma est en effet au moins d'ordre 2 en espace et en temps.

Exercice 2.3.5 Montrer que le schéma explicite décentré amont

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + V\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0 \quad \text{si} \quad V > 0 \\ \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + V\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} = 0 \quad \text{si} \quad V < 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

est consistant avec l'équation d'advection (**2.32**), précis à l'ordre 1 en espace et temps, stable et convergent en norme L^2 si la condition CFL $|V|\Delta t \leq \Delta x$ est satisfaite.

Correction. La précision d'ordre 1 en temps et en espace est aisée à établir. En effet, dans le cas $V > 0$,

$$\frac{u(t_{n+1},x_j)-u(t_n,x_j)}{\Delta t}+V\frac{u(t_n,x_j)-u(t_n,x_{j-1})}{\Delta x}$$
$$=(u_t+Vu_x)(t_n,x_j)+\mathcal{O}(\Delta t+\Delta x).$$

Le cas $V < 0$ est identique. Reste à établir la stabilité L^2 (on considère uniquement le cas $V > 0$, le cas $V < 0$ s'en déduisant en remplaçant j par $-j$ et V par $-V$). Par transformation de Fourier, on obtient

$$\frac{\hat{u}^{n+1}-\hat{u}^n}{\Delta t}+V\frac{\hat{u}^n-e^{2ik\pi\Delta x}\hat{u}^n}{\Delta x}=0.$$

Après simplification, on en déduit que $\hat{u}^{n+1}(k)=a(k)\hat{u}^n(k)$ avec

$$a(k)=\left(1-\frac{V\Delta t}{\Delta x}+\frac{V\Delta t}{\Delta x}\cos(2k\pi\Delta x)\right)+i\frac{V\Delta t}{\Delta x}\sin(2k\pi\Delta x).$$

Ainsi, les complexes $a(k)$ appartiennent à un cercle de centre $(1-V\Delta t/\Delta x, 0)$ de rayon $V\Delta t/\Delta x$. Le module de $a(k)$ est donc inférieure ou égal à 1 pour tout k si et seulement si

$$V\Delta t/\Delta x \le 1.$$

Sous cette condition, d'après le Théorème de Lax, le schéma est convergent en norme L^2.

Exercice 2.3.6 Montrer que l'équation équivalente du schéma décentré amont (2.18) est

$$\frac{\partial u}{\partial t}+V\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{|V|}{2}\left(\Delta x-|V|\Delta t\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0.$$

Correction. Considérons le cas $V > 0$. L'erreur de troncature du schéma décentré amont (2.18) est

$$E=\frac{\partial u}{\partial t}+V\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{V\Delta x}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\mathcal{O}((\Delta t)^2+(\Delta x)^2).$$

Soit u une fonction pour laquelle l'erreur de troncature E ci-dessus est d'ordre 2 en espace et en temps. On en déduit que

$$\frac{\partial u}{\partial t}+V\frac{\partial u}{\partial x}=\mathcal{O}(\Delta t+\Delta x).$$

donc, en dérivant par rapport à t,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=V^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\mathcal{O}(\Delta t+\Delta x).$$

Ainsi, l'erreur de troncature pour un tel u est égale à

$$E=\frac{\partial u}{\partial t}+V\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{V}{2}(V\Delta t-\Delta x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\mathcal{O}((\Delta t)^2+(\Delta x)^2).$$

L'équation équivalente s'obtient en ajoutant à l'équation d'origine le terme d'ordre $\mathcal{O}(\Delta t + \Delta x)$ dans E. Ainsi, dans le cas $V > 0$, l'équation équivalente est

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{V}{2}(V\Delta t - \Delta x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Il suffit de substituer Δx par $-\Delta x$ pour obtenir l'équation équivalente dans le cas $V < 0$. Enfin, on peut résumer ces deux résultats par l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{|V|}{2}(\Delta x - |V|\Delta t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

valable dans les deux cas.

Exercice 2.3.7 Montrer que l'équation équivalente du schéma de Lax-Wendroff (2.16) est

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{V(\Delta x)^2}{6}\left(1 - \frac{(V\Delta t)^2}{(\Delta x)^2}\right)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0.$$

Correction. L'erreur de troncature dans le cas du schéma de Lax-Wendroff (2.16) est

$$\begin{aligned}E(u) = \frac{u(t_{n+1}, x_j) - u(t_n, x_j)}{\Delta t} &+ V\frac{u(t_n, x_{j+1}) - u(t_n, x_{j-1})}{2\Delta x} \\ &- \left(\frac{V^2\Delta t}{2}\right)\frac{u(t_n, x_{j-1}) - 2u(t_n, x_j) + u(t_n, x_{j+1})}{(\Delta x)^2}.\end{aligned}$$

En effectuant un développement de Taylor en (t_n, x_j), on montre que

$$\begin{aligned}E(u) = \frac{\partial u}{\partial t} + V\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - V^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) &+ \frac{(\Delta t)^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \\ &+ \frac{V(\Delta x)^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \mathcal{O}((\Delta x)^3 + (\Delta t)^3). \quad (2.19)\end{aligned}$$

Soit u la solution de l'équation équivalente associée au schéma de Lax-Wendroff. L'erreur de troncature est alors au moins deux en temps et en espace. En particulier, on a donc

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V\frac{\partial u}{\partial x} = \mathcal{O}((\Delta t)^2 + (\Delta x)^2).$$

En dérivant cette équation et en l'utilisant une nouvelle fois, on en déduit que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - V^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \mathcal{O}((\Delta t)^2 + (\Delta x)^2).$$

En injectant cette équation dans l'expression de $E(u)$, on en déduit que

$$E(u) = \frac{\partial u}{\partial t} + V\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\Delta t^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \frac{V\Delta x^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \mathcal{O}((\Delta x)^3 + \Delta t(\Delta x)^2 + (\Delta t)^3).$$

Il suffit enfin de remarquer que $\partial^3 u/\partial t^3 = -V^3\partial^3 u/\partial x^3 + \mathcal{O}((\Delta t)^2 + (\Delta x)^2)$ pour obtenir que

$$E(u) = \frac{\partial u}{\partial t} + V\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{V\Delta x^2 - V^3\Delta t^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \mathcal{O}((\Delta x)^3 + \Delta t(\Delta x)^2 + (\Delta t)^3).$$

Ainsi, pour l'équation proposée, le schéma gagne en précision. Si on choisit Δt et Δx du même ordre de grandeur, le schéma est d'ordre 3. Cependant, le schéma n'est pas d'ordre 3 en temps et en espace pour cette équation équivalente : Le terme $\Delta t(\Delta x)^2$ n'est pas un $\mathcal{O}((\Delta x)^3 + (\Delta t)^3)$. Cela n'a aucune importance en pratique. Afin d'assurer la stabilité du schéma, on doit choisir $\Delta t = \mathcal{O}(\Delta x)$ pour lequel on obtient une précision de l'ordre de $(\Delta x)^3$ identique à celle qu'on obtiendrait si le schéma était d'ordre 3 en espace et en temps.

Exercice 2.3.8 Soit l'équation

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + V\frac{\partial u}{\partial x} - \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \text{ pour } (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+_* \\ u(t=0,x) = \sin(\omega x + \phi) \text{ pour } x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

avec $V, \nu, \mu, \omega, \phi \in \mathbb{R}$. Montrer que sa solution est

$$u(t,x) = \exp(-\nu\omega^2 t)\sin\big(\omega(x - (V + \mu\omega^2)t) + \phi\big)$$

(on admettra son unicité). En déduire que la diffusion atténue l'amplitude de la solution, tandis que la dispersion modifie la vitesse de propagation.

Correction. On détermine les dérivées partielles de u intervenant dans l'équation donnée. On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\nu\omega^2 u - \omega(V+\mu\omega^2)\exp(-\nu\omega^2 t)\cos\big(\omega(x - (V+\mu\omega^2)t) + \phi\big)\ , \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \omega\exp(-\nu\omega^2 t)\cos\big(\omega(x - (V+\mu\omega^2)t) + \phi\big)\ , \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -\omega^2 u\ , \end{aligned}$$

et

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = -\omega^3\exp(-\nu\omega^2 t)\cos\big(\omega(x - (V+\mu\omega^2)t) + \phi\big)\ .$$

En sommant ces différents termes, on obtient bien l'équation désirée satisfaite par u. L'atténuation de l'amplitude est $\exp(-\nu\omega^2 t)$. Elle est donc d'autant plus forte que le terme de diffusion ν est important. La vitesse de propagation de l'onde est $(V + \mu\omega^2)$ et dépend donc du terme de dispersion μ. Les ondes de fréquence élevée sont plus rapides que les ondes de basse fréquence si μ est positif, plus lentes dans le cas contraire.

Exercice 2.3.9 On définit le schéma "saute-mouton" (leapfrog, en anglais)

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + V\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0.$$

Étudier la consistance et l'erreur de troncature de ce schéma. Montrer par analyse de Fourier qu'il est stable sous la condition CFL $|V|\Delta t \leq M\Delta x$ avec $M < 1$.

Correction.

1. Étude de la consistance

Par développement de Taylor en (t_n, x_j) on a

$$\frac{u(t_{n+1},x_j)-u(t_{n-1},x_j)}{2\Delta t}+V\frac{u(t_n,x_{j+1})-u(t_n,x_{j-1})}{2\Delta x}=$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}+V\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{(\Delta t)^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}+V\frac{(\Delta x)^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\mathcal{O}((\Delta t)^3+(\Delta x)^3).$$

Si u est solution de l'équation d'advection, l'erreur de troncature est donc

$$E=\frac{V}{6}\left((\Delta x)^2-(\Delta t)^2V^2\right)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\mathcal{O}((\Delta t)^3+(\Delta x)^3).$$

Ainsi, le schéma saute-mouton est consistant, d'ordre 2 en espace et en temps.

2. Stabilité L^2

Par transformation de Fourier, on obtient

$$\hat{u}^{n+1}(k)=\hat{u}^{n-1}(k)-i2c\sin(2\pi k\Delta x)\hat{u}^n(k). \tag{2.20}$$

où $c=\frac{V\Delta t}{\Delta x}$. On introduit le polynôme (dépendant implicitement de k, Δt et Δx)

$$P(X)=X^2+i2c\sin(2\pi k\Delta x)X-1.$$

On note λ_1 et λ_2 les racines de P et $\Delta=4(1-c^2\sin^2(2k\pi\Delta x))$ son discriminant. Les solutions de (2.20) s'expriment explicitement en fonction de $\hat{u}^0$ et $\hat{u}^1$:

$$\hat{u}^n=\begin{cases}\left(\frac{\lambda_2\lambda_1^n-\lambda_1\lambda_2^n}{\lambda_2-\lambda_1}\right)\hat{u}^0+\left(\frac{\lambda_2^n-\lambda_1^n}{\lambda_2-\lambda_1}\right)\hat{u}^1 & \text{si } \Delta\neq 0,\\ (1-n)\lambda_1^n\hat{u}^0+n\lambda_1^{n-1}\hat{u}^1 & \text{si } \Delta=0.\end{cases}$$

Si $c>1$, le module de la somme des deux racines est égale à $2c|\sin(2\pi k\Delta x)|$. Pour Δx assez petit, il existe k tel que $2c|\sin(2\pi k\Delta x)|>2$. Le module de la somme des deux racines étant plus grand que 2, le module de l'une des deux racines est plus grand que un et le schéma est instable. Si $c=1$, on peut avoir $\Delta=0$ pour certaines valeurs de k et Δx telles que $\sin(2\pi k\Delta x)=\pm 1$. Dans ce cas, $\lambda_1=\lambda_2=\pm i$ et

$$\hat{u}^n=(n\hat{u}^1\pm i(n-1)\hat{u}^0)(\pm i)^{n-1}.$$

Le schéma est donc instable pour $c=1$.

Considérons le cas où c est majoré par une constante $M<1$, $0<c<M$. Dans ce cas, $\Delta>0$ et les racines de P sont de même module

$$|\lambda_1|=|\lambda_2|=1.$$

De plus, $|\lambda_1-\lambda_2|=\sqrt{\Delta}>2\sqrt{1-M^2}>0$. On déduit de l'expression explicite de $\hat{u}^n$ en fonction de $\hat{u}^0$ et $\hat{u}^1$ que

$$|\hat{u}^n|\leq 2\frac{|\hat{u}^0|+|\hat{u}^1|}{\sqrt{1-M^2}}.$$

Ainsi, sous la condition CFL, $V\Delta t/\Delta x\leq M<1$, le schéma saute-mouton est stable L^2.

Exercice 2.3.10 On définit le schéma de Crank-Nicholson

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + V\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{4\Delta x} + V\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{4\Delta x} = 0.$$

Étudier la consistance et l'erreur de troncature de ce schéma. Montrer par analyse de Fourier qu'il est inconditionnellement stable.

Correction.

<u>1. Consistance</u>

Par développement de Taylor en (t_n, x_n), on montre que

$$\begin{aligned}
&\frac{u(t_{n+1}, x_j) - u(t_n, x_j)}{\Delta t} + V\frac{u(t_{n+1}, x_{j+1}) - u(t_{n+1}, x_{j-1})}{4\Delta x} \\
&\quad + V\frac{u(t_n, x_{j+1}) - u(t_n, x_{j-1})}{4\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial t} + V\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t^2} + V\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}\right) \\
&\qquad + (\Delta t)^2\left(\frac{1}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \frac{V}{4}\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2}\right) \\
&\qquad\qquad + \frac{(\Delta x)^2 V}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \mathcal{O}((\Delta t)^3 + (\Delta x)^3).
\end{aligned}$$

Ainsi, si u est solution de l'équation d'advection, l'erreur de troncature est

$$E(u) = \frac{V}{12}\left(2(\Delta x)^2 + V^2(\Delta t)^2\right)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \mathcal{O}((\Delta t)^3 + (\Delta x)^3).$$

Le schéma de Crank-Nicholson est donc d'ordre 2 en temps et en espace.

<u>2. Stabilité L^2</u>

Par transformation de Fourier, on établit que

$$\hat{u}^{n+1}\left(1 + \frac{iV\Delta t}{2\Delta x}\sin(2\pi k\Delta x)\right) = \hat{u}^n\left(1 - \frac{iV\Delta t}{2\Delta x}\sin(2\pi k\Delta x)\right).$$

Ainsi, $|\hat{u}^{n+1}| = |\hat{u}^n|$. Le schéma est donc inconditionnellement stable en norme L^2.

Exercice 2.3.11 On considère la discrétisation des ondes

$$\begin{cases}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{pour tout } (x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}_*^+ \\
u(t, x+1) = u(t,x) & \text{pour tout } (x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}_*^+ \\
u(t=0, x) = u_0(x) & \text{pour tout } x \in (0,1) \\
\frac{\partial u}{\partial t}(t=0,x) = u_1 & \text{pour tout } x \in (0,1),
\end{cases} \tag{2.21}$$

par le θ-schéma centré suivant

$$\begin{aligned}
&\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{(\Delta t)^2} &&+\theta\frac{-u_{j-1}^{n+1} + 2u_j^{n+1} - u_{j+1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} \\
+(1-2\theta)&\frac{-u_{j-1}^n + 2u_j^n - u_{j+1}^n}{(\Delta x)^2} &&+\theta\frac{-u_{j-1}^{n-1} + 2u_j^{n-1} - u_{j+1}^{n-1}}{(\Delta x)^2} = 0,
\end{aligned} \tag{2.22}$$

$$u_{j+N+1}^n = u_j^n,$$
$$u_j^0 = u_0(x_j) \text{ et } \frac{u_j^1 - u_j^0}{\Delta t} = \int_{x_{j-1/2}}^{j+1/2} u_1(x)\,dx,$$

avec $x_j = j\Delta x$ et $x_{j+1/2} = (x_j + x_{j+1})/2$ où $\Delta x = 1/(N+1)$. On suppose que la vitesse initiale est de moyenne nulle, c'est à dire que

$$\int_0^1 u^1(x)\,dx = 0. \tag{2.23}$$

Montrer que est inconditionnellement stable en norme L^2 si $\theta \geq 1/4$ et que pour $0 \leq \theta \leq 1/4$, il est stable pourvu qu'il existe une constante M indépendante de Δx et Δt telle que

$$(1-4\theta)\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 < M < 1. \tag{2.24}$$

Correction. Notons que si $\theta \geq 1/4$, la condition (2.24) est vérifiée. Ainsi, il suffit de prouver la stabilité du schéma pour tout $\theta \geq 0$, tel que la condition (2.24) soit satisfaite. On utilise l'analyse de Fourier pour obtenir

$$\hat{U}^{n+1}(k) = \begin{pmatrix} \hat{u}^{n+1}(k) \\ \hat{u}^n(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2-(1-2\theta)\alpha(k)}{1+\theta\alpha(k)} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \hat{U}^n(k) = A(k)\hat{U}^n(k),$$

où

$$\alpha(k) = 4\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2(\pi k \Delta x).$$

Ainsi, $\hat{U}^{n+1}(k) = A(k)^n \hat{U}^0(k)$. Les valeurs propres de la matrice $A(k)$ sont les racines du polynôme

$$\lambda^2 - \frac{2-(1-2\theta)\alpha(k)}{1+\theta\alpha(k)}\lambda + 1 = 0, \tag{2.25}$$

dont le discriminant est

$$\Delta(k) = -\frac{\alpha(k)}{(1+\theta\alpha(k))^2}\left(4 - (1-4\theta)\alpha(k)\right).$$

Si $\alpha(k) = 0$, le polynôme (2.25) possède une racine double $\lambda = 1$. Si $\alpha(k) \neq 0$, d'après la condition CFL (2.24), $\Delta(k) < 0$ et le polynôme possède deux racines distinctes complexes, conjuguées l'une de l'autre, de module 1. Considérons le premier cas, c'est-à-dire $\alpha(k) = 0$. On a alors $\sin(\pi k \Delta x) = 0$ et comme $\Delta x = 1/(N+1)$, il existe p tel que $k = p(N+1)$. On note v la vitesse initiale et v_j la vitesse discrétisée.

$$\hat{v}(k) = \sum_{j=0}^N v_j e^{i2\pi k j \Delta x} = \sum_{j=0}^N v_j e^{i2\pi p} = \sum_{j=0}^N v_j = 0,$$

d'après l'hypothèse (2.23) de vitesse moyenne initiale nulle effectuée. Ainsi, $\hat{u}^1(k) = \hat{u}^0(k) + \Delta t \hat{v}(k) = \hat{u}^0(k)$. Or

$$A(k)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

d'où

$$\hat{U}^n(k) = A(k)^n \hat{U}^n(0) = A(k)^n \begin{pmatrix} \hat{u}^0(k) \\ \hat{u}^0(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{u}^0(k) \\ \hat{u}^0(k) \end{pmatrix} = \hat{U}^0(k).$$

On a montré que si $\alpha(k) = 0$, alors $\hat{u}^n(k) = \hat{u}^0(k)$ pour tout n.

Reste à considérer le cas $\alpha(k) \neq 0$. Dans ce cas, le polynôme (2.25) possède deux racines distinctes λ et $\overline{\lambda}$. La matrice $A(k)$ est donc diagonalisable. Plus précisément,

$$A(k) = \frac{1}{\lambda - \overline{\lambda}} \begin{pmatrix} \lambda & \overline{\lambda} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \overline{\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\overline{\lambda} \\ -1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$A(k)^n = \frac{1}{\lambda - \overline{\lambda}} \begin{pmatrix} \lambda & \overline{\lambda} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \overline{\lambda}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\overline{\lambda} \\ -1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

On obtient ainsi une expression explicite de $\hat{u}^{n+1}(k)$ en fonction de $\hat{u}^0(k)$ et $\hat{v}(k)$. Plus précisément,

$$\hat{u}^{n+1}(k) = \frac{1}{\lambda - \overline{\lambda}} \left(\left((\lambda^{n+1} - \overline{\lambda}^{n+1}) - (\lambda^n - \overline{\lambda}^n) \right) \hat{u}^0(k) - \Delta t (\lambda^{n+1} - \overline{\lambda}^{n+1}) \hat{v}(k) \right),$$

ou encore

$$\hat{u}^{n+1}(k) = \frac{1}{\lambda - \overline{\lambda}} \left(\left(\lambda^n (\lambda - 1) - \overline{\lambda}^n (\overline{\lambda} - 1) \right) \hat{u}^0(k) - \Delta t (\lambda^{n+1} - \overline{\lambda}^{n+1}) \hat{v}(k) \right).$$

Un calcul explicite de la racine λ du polynôme (2.25) nous donne

$$\lambda = \frac{2 - (1 - 2\theta)\alpha(k) + i\sqrt{-\Delta(k)}}{2(1 + \theta\alpha(k))}.$$

La condition CFL (2.24) stipule que $4 - (1 - 4\theta)\alpha(k)$ est minoré par une constante strictement positive. Ainsi, il existe une constante C_1 indépendante de k telle que

$$\left| \frac{\lambda - 1}{\lambda - \overline{\lambda}} \right| = (2(1 + \theta\alpha(k)))^{-1} \left| 1 + i2(1 - 2\theta) \sqrt{\frac{\alpha(k)}{4 - (1 - 4\theta)\alpha(k)}} \right| < C_1. \tag{2.26}$$

D'autre part, en utilisant à nouveau la condition CFL, on établit qu'il existe une constante C_2, indépendante de k telle que

$$\frac{\Delta t}{|\lambda - \overline{\lambda}|} \leq C_2 \frac{\Delta t}{\sqrt{\alpha(k)}}$$

Or

$$\left(\min_{k : \sin(k\pi\Delta x) \neq 0} \sqrt{\alpha(k)} \right) = 2 \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right) \sin(\pi \Delta x) > \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right) \pi \Delta x = \pi \Delta t$$

dès que Δx est assez petit. Ainsi,

$$\frac{\Delta t}{|\lambda - \overline{\lambda}|} \leq \pi^{-1} C_2.$$

De cette dernière estimation, de l'estimation (2.26), de l'expression de $u^{n+1}(k)$ et le module de λ étant égal à 1, on déduit que

$$|\hat{u}^{n+1}(k)| \leq 2C_1|\hat{u}^0(k)| + \pi^{-1}C_2|\hat{v}(k)|.$$

Le schéma est donc stable pour la norme L^2 et il existe une constante C telle que

$$\|u^n\|_{L^2} \leq C\left(\|u^0\|_{L^2} + \|v\|_{L^2}\right).$$

Exercice 2.3.12 On considère le cas limite de L'Exercicie 2.3.11, c'est-à-dire $\Delta t/\Delta x = (1-4\theta)^{-1/2}$ avec $0 \leq \theta < 1/4$. Montrer que le θ-schéma centré (2.22) est instable dans ce cas en vérifiant que $u_j^n = (-1)^{n+j}(2n-1)$ est une solution (remarquez qu'il s'agit d'une instabilité "faible" puisque la croissance de u^n est linéaire et non exponentielle).

Correction. Soit $u_j^n = (-1)^{n+j}(2n-1)$,

$$-u_{j-1}^n + 2u_j^n - u_{j+1}^n = 4(-1)^{n+j}(2n-1)$$

et

$$u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1} = 4(-1)^{n+j+1}(2n-1).$$

En substituant ces relations dans l'expression du θ schéma et en considérant le cas $(\Delta t/\Delta x)^2 = (1-4\theta)^{-1}$, on en déduit que u_j^n est bien solution du schéma numérique, car

$$\begin{aligned}
&\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{(\Delta t)^2} + \theta\frac{-u_{j-1}^{n+1} + 2u_j^{n+1} - u_{j+1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} \\
&\qquad + (1-2\theta)\frac{-u_{j-1}^n + 2u_j^n - u_{j+1}^n}{(\Delta x)^2} + \theta\frac{-u_{j-1}^{n-1} + 2u_j^{n-1} - u_{j+1}^{n-1}}{(\Delta x)^2} \\
&\qquad = \frac{4}{\Delta t^2}(-1)^{n+j+1}(2n-1) + \frac{\theta}{\Delta x^2}4(-1)^{n+j+1}(2n+1) \\
&\qquad + \frac{(1-2\theta)4(-1)^{n+j+1}}{\Delta x^2}(2n-1) + \frac{4\theta(-1)^{n+j-1}}{\Delta x^2}(2n-3) \\
&= 4(-1)^{n+j+1}\left((2n-1) + \frac{\theta}{\Delta x^2}(2n+1) + \frac{2\theta-1}{\Delta x^2}(2n-1) + \theta\frac{2n-3}{\Delta x^2}\right) \\
&\qquad = 4(-1)^{n+j+1}\left(\frac{2n-1}{\Delta t^2} + \frac{2\theta-1}{\Delta x^2}(2n-1) + \frac{2\theta}{\Delta x^2}(2n-1)\right)
\end{aligned}$$

$$= 4(-1)^{n+j+1}(2n-1)\left(\frac{1}{\Delta t^2} + \frac{2\theta-1}{\Delta x^2} + \frac{2\theta}{\Delta x^2}\right) = 4(-1)^{n+j+1}\frac{2n-1}{\Delta x^2}\left(\frac{\Delta x^2}{\Delta t^2} + 4\theta - 1\right) = 0.$$

Exercice 2.3.13 Montrer que le θ-schéma centré (2.22) conserve l'énergie discrète, c'est-à-dire que $E^{n+1} = E^1$ pour tout $n \geq 0$, où

$$E^{n+1} = \sum_{j=0}^{N} \left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \right)^2 + a_{\Delta x}(u^{n+1}, u^n) + \theta a_{\Delta x}(u^{n+1} - u^n, u^{n+1} - u^n)$$

avec

$$a_{\Delta x}(u, v) = \sum_{j=0}^{N} \left(\frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta x} \right) \left(\frac{v_{j+1} - v_j}{\Delta x} \right).$$

Correction. On multiplie (2.22) par $u_j^{n+1} - u_j^{n-1}$ et il vient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(\Delta t)^2} \left(u_j^{n+1} - u_j^n - (u_j^n - u_j^{n-1})\right) \left(u_j^{n+1} - u_j^n + (u_j^n - u_j^{n-1})\right) \\
&+ \frac{1}{(\Delta x)^2} \left(-u_{j-1}^n + 2u_j^n - u_{j+1}^n\right) \left(u_j^{n+1} - u_j^{n-1}\right) \\
&+ \frac{\theta}{(\Delta x)^2} \left(-(u_{j-1}^{n+1} - u_{j-1}^n) + 2(u_j^{n+1} - u_j^n) - (u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n)\right) \left(u_j^{n+1} - u_j^{n-1}\right) \\
&+ \frac{\theta}{(\Delta x)^2} \left(-(u_{j-1}^{n-1} - u_{j-1}^n) + 2(u_j^{n-1} - u_j^n) - (u_{j+1}^{n-1} - u_{j+1}^n)\right) \left(u_j^{n+1} - u_j^{n-1}\right) = 0.
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Remarquons qu'en réarrangeant la somme en j (ce qui correspond à une intégration par parties "discrète"), on a

$$\sum_{j=0}^{N} \left(-u_{j-1}^n + 2u_j^n - u_{j+1}^n\right) v_j = \sum_{j=0}^{N} \left(u_{j+1}^n - u_j^n\right) (v_{j+1} - v_j).$$

Par conséquent, en sommant en j les équations (2.27), on a

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{N} \left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \right)^2 - \sum_{j=0}^{N} \left(\frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} \right)^2 &+ a_{\Delta x}(u^n, u^{n+1} - u^{n-1}) \\
&+ \theta a_{\Delta x}(u^{n+1} - u^n, u^{n+1} - u^n + (u^n - u^{n-1})) \\
&+ \theta a_{\Delta x}(u^{n-1} - u^n, u^{n+1} - u^n + (u^n - u^{n-1})) = 0,
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{N} \left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \right)^2 + a_{\Delta x}(u^n, u^{n+1}) + \theta a_{\Delta x}(u^{n+1} - u^n, u^{n+1} - u^n) \\
=&\sum_{j=0}^{N} \left(\frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} \right)^2 + a_{\Delta x}(u^{n-1}, u^n) + \theta a_{\Delta x}(u^n - u^{n-1}, u^n - u^{n-1}),
\end{aligned}$$

ce qui prouve $E^{n+1} = E^n$.

Exercice 2.3.14 On considère la reformulation de l'équation des ondes (2.21) sous la forme de l'équation d'advection suivantes

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{\partial U}{\partial t} - J\frac{\partial U}{\partial x} = 0 & \text{pour tout } (x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}_*^+ \\ U(t,x) = U(t,x+1) & \text{pour tout } (x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}_*^+ \\ U(t=0,x) = \begin{pmatrix} \partial u_0/\partial x \\ u_1 \end{pmatrix}(x) & \text{pour tout } x \in (0,1) \end{array}\right. , \qquad (2.28)$$

avec

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que le schéma de Lax-Friedrichs définissant $U_j^n = (v_j^n, w_j^n)$ par

$$\frac{1}{2\Delta t}\begin{pmatrix} 2v_j^{n+1} - v_{j+1}^n - v_{j-1}^n \\ 2w_j^{n+1} - w_{j+1}^n - w_{j-1}^n \end{pmatrix} - \frac{1}{2\Delta x}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{j+1}^n - v_{j-1}^n \\ w_{j+1}^n - w_{j-1}^n \end{pmatrix} = 0, \qquad (2.29)$$

$$U_{j+N+1}^n = U_j^n$$

et

$$U_j^0 = U(t=0, x_j)$$

avec $x_j = j(\Delta x) = j/(N+1)$ est stable en norme L^2 sous la condition CFL $\Delta t \leq \Delta x$, et qu'il est précis à l'ordre 1 en espace et temps si le rapport $\Delta t/\Delta x$ est gardé constant lorsque Δt et Δx tendent vers zéro.

Correction.

1. Consistance

On note $E_{n,j}$ l'erreur de troncature

$$E_{n,j} = \frac{1}{2\Delta t}\left(2U(t_{n+1}, x_j) - U(t_n, x_{j+1}) - U(t_n, x_{j-1})\right) - \frac{1}{2\Delta x} J\left(U(t_n, x_{j+1}) - U(t_n, x_{j-1})\right).$$

En effectuant un développement de Taylor en (t_n, x_j), on obtient

$$E_{n,j} = \frac{\partial U}{\partial t} - J\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \mathcal{O}\left((\Delta x)^2 + (\Delta t)^2 + \frac{(\Delta x)^4}{\Delta t}\right).$$

D'après l'équation vérifiée par U, on a $\frac{\partial U}{\partial t} = J\frac{\partial U}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$. Ainsi,

$$E_{n,j} = (2\Delta t)^{-1}\left((\Delta t)^2 - (\Delta x)^2\right)\frac{\partial^2 U}{\partial^2 x} + \mathcal{O}\left((\Delta x)^2 + (\Delta t)^2 + \frac{(\Delta x)^4}{\Delta t}\right).$$

Si le rapport $\Delta t/\Delta x$ est constant et différent de un, le schéma est précis à l'ordre 1. Si on choisit Δt et Δx égaux, le schéma est précis à l'ordre au moins 2.

2. Stabilité L^2

Étudions la stabilité L^2. Par transformation de Fourier, on établit que

$$\begin{pmatrix} \hat{v}^{n+1} \\ \hat{w}^{n+1} \end{pmatrix} = A(k)\begin{pmatrix} \hat{v}^n \\ \hat{w}^n \end{pmatrix},$$

où

$$A(k) = \cos(2k\pi\Delta x)\,\mathrm{Id} + i\sin(2k\pi\Delta x)\frac{\Delta t}{\Delta x}J.$$

On pose $\alpha = \cos(2k\pi\Delta x)$ et $\beta = \sin(2k\pi\Delta x)\frac{\Delta t}{\Delta x}$. On diagonalise la matrice $A(k)$ et on établit que

$$A(k) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha - i\beta & 0 \\ 0 & \alpha + i\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Notons que

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \mathrm{Id}\,.$$

Ainsi, le schéma est stable L^2 si et seulement si $|\alpha + i\beta| \leq 1$. Or

$$|\alpha + i\beta|^2 = \cos(2k\pi\Delta x)^2 + \sin(2k\pi\Delta x)^2(\Delta t/\Delta x)^2.$$

Le schéma est donc stable en norme L^2 sous la condition CFL $\Delta t \leq \Delta x$. De plus, d'après le Théorème de Lax, il est converent en norme L^2 sous cette condition.

Exercice 2.3.15 On considère la discrétisation de l'équation des ondes (2.28) par le schéma de Lax-Wendroff

$$\frac{1}{\Delta t}\begin{pmatrix} v_j^{n+1} - v_j^n \\ w_j^{n+1} - w_j^n \end{pmatrix} - \frac{1}{2\Delta x}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{j+1}^n - v_{j-1}^n \\ w_{j+1}^n - w_{j-1}^n \end{pmatrix} \tag{2.30}$$

$$+\frac{\Delta t}{2(\Delta x)^2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2\begin{pmatrix} -v_{j-1}^n + 2v_j^n - v_{j+1}^n \\ -w_{j-1}^n + 2w_j^n - w_{j+1}^n \end{pmatrix} = 0.$$

Montrer que ce schéma est stable en norme L^2 sous la condition CFL $\Delta t \leq \Delta x$, et qu'il est précis à l'ordre 2 en espace et temps.

Correction.

<u>1. Consistance</u>

On pose $U = (v, w)$ et

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On effectue un développement de Taylor en (t_n, x_j) afin d'évaluer l'erreur de troncature

$$\begin{aligned} E_{n,j} =& \frac{1}{\Delta t}(U(t_{n+1}, x_j) - U(t_n, x_j)) - \frac{1}{2\Delta x}J\left(U(t_n, x_{j+1}) - U(t_n, x_{j-1})\right) \\ &+ \frac{\Delta t}{2(\Delta x)^2}(-U(t_n, x_j - 1) + 2U(t_n, x_j) - U(t_n, x_{j+1})) = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \\ &+ J\frac{(\Delta t)^2}{6}\frac{\partial^3 U}{\partial t^3} - J\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{(\Delta x)^2}{6}\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} - \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \mathrm{o}((\Delta t)^2 + (\Delta x)^2). \end{aligned}$$

Si U est solution de l'équation (2.28), on en déduit que l'erreur de troncature est

$$E_{n,j} = \frac{1}{6}\left((\Delta t)^2 - (\Delta x)^2\right)J\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \mathrm{o}((\Delta x)^2 + (\Delta t)^2).$$

Le schéma est donc d'ordre deux en temps et en espace.
2. Stabilité L^2.
Établissons la stabilité L^2 sous la condition CFL $\Delta t \leq \Delta x$. Par transformation de Fourier, on établit que

$$\hat{U}^{n+1}(k) = \left(\left(1 - 2\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2(k\pi\Delta x) \right) \mathrm{Id} + i\frac{\Delta t}{\Delta x}\sin(2k\pi\Delta x)J \right) \hat{U}^n(k).$$

On pose $\alpha = 1 - 2\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2(k\pi\Delta x)$ et $\beta = \frac{\Delta t}{\Delta x}\sin(2k\pi\Delta x)$ et on procède comme pour l'exercice précédent. Ainsi, le schéma est stable L^2 si et seulement si $|\alpha+i\beta| \leq 1$. Or

$$|\alpha + i\beta|^2 = 1 - 4\sin^4(k\pi\Delta x)\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \left(1 - \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2\right).$$

Ainsi, le schéma est stable L^2 dès que

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1.$$

Le schéma étant consistant, il est donc convergent sous la condition CFL ci-dessus.