Chapitre 9

INTRODUCTION A L'OPTIMISATION

Exercice 9.1.1 Montrer par des exemples que le fait que K est fermé ou que J est continue est en général nécessaire pour l'existence d'un minimum. Donner un exemple de fonction continue et minorée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ n'admettant pas de minimum sur $\mathbb{R}$.

Correction. Exemples de non-existence de minimum

- K non fermé : minimisation de $J(x) = x$ sur $]0,1[$.
- J non continue : minimisation sur $\mathbb{R}$ de $J(x) = x^2$ pour $x \neq 0$, $J(0) = 1$.
- J non coercive : minimisation sur $\mathbb{R}$ de $J(x) = e^{-x}$.

Exercice 9.1.2 Montrer que l'on peut remplacer la propriété "infinie à l'infini" (**9.3**) du Théorème d'existence **9.1.3** de minimiseur en dimension finie par la condition plus faible

$$\inf_{v \in K} J(v) < \lim_{R \to +\infty} \left(\inf_{\substack{\|v\| \geq R \\ v \in K}} J(v) \right) .$$

Correction. Soit (u^n) une suite minimisante de J sur K. Comme

$$\inf_{v \in K} J(v) < \lim_{R \to +\infty} \left(\inf_{\substack{\|v\| \geq R \\ v \in K}} J(v) \right) ,$$

et que $J(v_n)$ converge vers $\inf_{v \in K} J(v)$, il existe $\delta > 0$ tel que pour n assez grand,

$$J(v_n) < \lim_{R \to +\infty} \left(\inf_{\substack{\|v\| \geq R \\ v \in K}} J(v) \right) - \delta.$$

Ainsi, il existe R tel que pour n assez grand,

$$J(v_n) < \inf_{\substack{\|v\| \geq R \\ v \in K}} J(v).$$

On en déduit que pour n assez grand, v_n appartient à la boule de rayon R. Autrement dis, la suite v_n reste bornée. La suite de la démonstration est alors identique à la démonstration initiale.

Exercice 9.1.3 Montrer que la conclusion du Thèorème **9.1.3** d'existence d'un minimiseur en dimension finie reste valable si on remplace l'hypothèse de continuité de J la condition de semi-continuité inférieure

$$\forall (u^n)_{n\geq 0} \text{ suite dans } K\ ,\ \lim_{n\to+\infty} u^n = u \Longrightarrow \liminf_{n\to+\infty} J(u^n) \geq J(u)\ .$$

Correction. Soit (u_n) une suite minimisante de J sur K. Comme J est supposée infinie à l'infini, u_n est bornée, puisque $J(u_n)$ est une suite de réels majorée. Il existe donc une sous-suite (u^{n_k}) convergeant vers un élément $u \in \mathbb{R}^N$. Comme K est fermé, $u \in K$. D'autre part, comme J est semi-continue inférieurement,

$$J(u) \leq \liminf_{k\to\infty} J(u^{n_k}) = \inf_{v\in K} J(v)$$

et

$$J(u) = \inf_{v\in K} J(v).$$

Exercice 9.1.4 Montrer qu'il existe un minimum pour les Exemples **9.1.1**, **9.1.6** et **9.1.7**.

Correction.
Exemple 9.1.1 : Problème de transport. On considère le problème de minimisation de

$$J(v) = \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} c_{ij}v_{ij}$$

sur

$$K = \Big\{ v \in \mathbb{R}_+^{M\times N} \text{ tel que } \sum_{j=1}^{N} v_{ij} \leq s_i \text{ et } \sum_{i=1}^{M} v_{ij} = r_j \quad \text{pour tout } 1 \leq i \leq M \text{ et } 1 \leq j \leq N \Big\}.$$

Tout d'abord K est fermé et d'après l'hyptohèse

$$\sum_{j=1}^{N} r_j \leq \sum_{i=1}^{M} s_i,$$

K est non vide. Enfin, J est continu et comme K est borné, aucune hyptohèse sur le comportement de J à l'infini n'est nécessaire. On en déduit qu'il existe au moins un minimiseur de J sur K.

Exemple 9.1.6 : Optimisation quadratique sous contraintes linéaires. On a
$$J(x) = \frac{1}{2}Ax \cdot x - b \cdot x,$$
et
$$K = \mathrm{Ker}(B).$$
L'espace admissible K est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^N$ et est donc fermé. De plus, comme $0 \in K$, il est non vide. Enfin, A étant supposée symétrique définie positive, l'application $x \mapsto Ax \cdot x$ est une norme équivalente à la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^N$. Il existe donc une constante C telle que
$$Ax \cdot x \geq 2C\|x\|^2$$
et
$$J(x) \geq C\|x\|^2 - \|b\|\|x\|.$$
On en déduit que J est infinie à l'infini. Comme J est également continue, on en conclut que J admet un minimiseur sur K.
Exemple 9.1.7 : Première valeur propre. On pose
$$J(x) = Ax \cdot x$$
et
$$K = \{x \in \mathbb{R}^N \text{ tel que } \|x\| = 1\}.$$
L'espace admissible K est fermé (car image réciproque d'un fermé par une application continue) et trivialement non vide. Enfin, J est continue et comme K est borné, aucune hypothèse sur le comportement de J à l'infini n'est à verifier (même si dans ce cas, J est en effet infinie à l'infini). On en conclut par application du Thèorème **9.1.3** que J admet un minimiseur sur K.

Exercice 9.1.5 Soit a et b deux réels avec $0 < a < b$, et pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des polynômes P de degré inférieur ou égal à n tels que $P(0) = 1$. Pour $P \in \mathcal{P}_n$, on note $\|P\| = \max_{x\in[a,b]} |P(x)|$.

1. Montrer que le problème
$$\inf_{P\in\mathcal{P}_n} \|P\| \tag{9.1}$$
a une solution.
2. On rappelle que les polynômes de Tchebycheff $T_n(X)$ sont définis par les relations
$$T_0(X) = 1 \ , \ T_1(X) = X \ , \ T_{n+1}(X) = 2XT_n(X) - T_{n-1}(X) \ .$$
Montrer que le degré de T_n est égal à n et que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$. En déduire l'existence de $n+1$ réels
$$\xi_0^n = 1 > \xi_1^n > \xi_2^n > \cdots > \xi_n^n = -1$$
tels que $T_n(\xi_k^n) = (-1)^k$ pour $0 \leq k \leq n$ et que $\max_{-1\leq x\leq 1} |T_n(x)| = 1$.

3. Montrer que l'unique solution de (9.1) est le polynôme

$$P(X) = \frac{1}{T_n\left(\dfrac{b+a}{b-a}\right)} T_n\left(\frac{\dfrac{b+a}{2} - X}{\dfrac{b-a}{2}}\right).$$

Correction.
1. L'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n tel que $P(0) = 1$ est un sous espace affine (et fermé) de l'ensemble de polynôme de degré inférieur ou égal à n muni de la norme $\max_{x\in[a,b]} |P(x)|$. Toutes les hypothèses du Théorème **9.1.3** sont satisfaites d'où on déduit l'existence d'une solution au problème de minimisation de $\|P\|$ sur $\mathcal{P}_n$.
2. Soit P_n la proposition stipulant que pour tout $0 \leq p \leq n$, T_p est un polynôme de dégré p tel que $T_p(\cos(\theta)) = \cos(p\theta)$. Soit $n \geq 1$ et supposons P_n vrai. Par définition,

$$T_{n+1}(X) = 2XT_n(X) - T_{n-1}(X).$$

D'après l'hypothèse de récurrence, on en déduit que T_{n+1} est un polynôme de degré $n+1$ (c'est la somme d'un polynôme de degré $n+1$ et d'un polynôme de degré $n-1$). De plus,

$$\begin{aligned} T_{n+1}(\cos\theta) &= 2(\cos\theta)T_n(\cos\theta) - T_{n-1}(\cos\theta) \\ &= 2(\cos\theta)(\cos n\theta) - (\cos(n-1)\theta) = \cos((1+n)\theta). \end{aligned}$$

Ainsi, $P_n \Rightarrow P_{n+1}$. Comme P_1 est vraie, on en déduit que P_n est vraie pour tout $n \geq 1$.
Pour tout $0 \leq k \leq n$, on pose $\xi_k^n = \cos(k\pi/n)$. On a $\xi_0^n = 1 > \xi_1^n > \cdots > \xi_n^n = -1$ et $T_n(\xi_n^k) = \cos(k\pi) = (-1)^k$. Enfin,

$$\max_{-1\leq x\leq 1} |T_n(x)| = \max_{\theta\in\mathbb{R}} |T_n(\cos(\theta))| = \max_{\theta\in\mathbb{R}} |\cos(n\theta)| = 1.$$

3. Soit R un polynôme de norme minimal appartenant à $\mathcal{P}_n$. On considère le polynôme $S = P - R$ où

$$P(X) = \frac{1}{T_n\left(\dfrac{b+a}{b-a}\right)} T_n\left(\frac{\dfrac{b+a}{2} - X}{\dfrac{b-a}{2}}\right).$$

On veut montrer que $S = 0$. Pour tout $k = 0, \cdots, n$, on pose $y_k = \frac{a+b}{2} - \left(\frac{a-b}{2}\right)\xi_k$. D'après la question précédente, $P(y_k) = (-1)^k\|P\|$. On définit les ensembles d' indices

$$\begin{aligned} &I = \{i \in \{0, \cdots, n-1\} : S(y_i) \neq 0 \text{ et } S(y_{i+1}) \neq 0\} \\ &J = \{j \in \{1, \cdots, n-1\} : S(y_j) = 0\} \\ &K = \{k \in \{0, n\} : S(y_k) = 0\}. \end{aligned}$$

On vérifie que $|I| + 2|J| + |K| \geq n$. Pour tout $j \in J$, on a $|R(y_j)| = \|P\| \geq \|R\|$, d'où $\|R\| = |R(y_j)|$ et $R'(y_j) = 0$. De plus, $P'(y_j) = 0$, d'où $S'(y_j) = 0$.

Pour tout $i \in I$, comme $\|P\| \geq \|R\|$, le signe de $S(y_i) = P(y_i) - R(y_i)$ est égale au signe de $P(y_i) = \|P\|(-1)^i$. De manière similaire, le signe de $S(y_{i+1})$ est $(-1)^{i+1}$. Comme $S(y_i)$ et $S(y_{i+1})$ sont de signes opposés, le polynôme S s'annule sur l'intervalle $[y_i, y_{i+1}]$ au moins une fois.
Ainsi, pour tout $j \in J$, $S(y_j) = S'(y_j) = 0$ et y_j est une racine double, pour tout $i \in I$, il existe $x_i \in]y_i, y_{i+1}[$ tel que $S(x_i) = 0$ et pour tout $k \in K$, $S(y_k) = 0$. De plus $S(0) = 0$. Ainsi, S admet au moins $|I| + 2|J| + |K| + 1$ racines (multiples). Comme S est de degré au plus $n \leq |I| + 2|J| + |K|$, on a $S = 0$.

Exercice 9.2.1 Modifier la construction de l'Exemple **9.2.2** pour montrer qu'il n'existe pas non plus de minimum de

$$J_h(v) = \int_0^1 \Big((|v'(x)| - h)^2 + v(x)^2\Big)dx\ .$$

sur $C^1[0,1]$ pour $h \neq 0$.

Correction. Soit $a \in [0,1]$. On note P_a la fonction de $C^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ paire, 2 périodique définie sur $[0,1]$ par

$$P_a(x) = \begin{cases} x^2/2a + (a-1)/2 & \text{si } 0 \leq x \leq a \\ x - 1/2 & \text{si } a \leq x \leq 1-a, \\ -(x-1)^2/2(1-a) + (1-a)/2 & \text{si } 1-a \leq x \leq 1 \end{cases}$$

On note $u^n \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ la fonction $2/n-$périodique, définie par

$$u^n(x) = n^{-1} h P_{n^{-1}}(nx).$$

On vérifie de $u^n(x) \to 0$ presque partout et que $|(u^n)'(x)| \to h$ presque partout. Ainsi, l'infimum de J_h sur $C^1([0,1])$ est nul et ne peut être atteint si $h > 0$.

Exercice 9.2.2 Soient J_1 et J_2 deux fonctions convexes sur V, $\lambda > 0$, et φ une fonction convexe croissante sur un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant l'ensemble $J_1(V)$. Montrer que $J_1 + J_2$, $\max(J_1, J_2)$, λJ_1 et $\varphi \circ J_1$ sont convexes.

Correction. La convexité de $J_1 + J_2$ comme de λJ_1 est triviale à établir.

$$\begin{aligned} Epi(\max(J_1, J_2)) &= \{(\lambda, v) \in \mathbb{R} \times V : \lambda \geq J_1(v) \text{ et } \lambda \geq J_2(v)\} \\ &= Epi(J_1) \cap Epi(J_2). \end{aligned}$$

L'intersection de deux convexes étant convexe, $Epi(\max(J_1, J_2))$ est convexe et $\max(J_1, J_2)$ est convexe.
Comme J est convexe et φ croissante,

$$\varphi \circ J(\theta x + (1-\theta)y) \leq \varphi(\theta J(x) + (1-\theta)J(y))$$

enfin comme φ est convexe il vient,

$$\varphi \circ J(\theta x + (1-\theta)y) \leq \theta\varphi \circ J(x) + (1-\theta)\varphi \circ J(y).$$

La convexité de $\varphi \circ J$ est ainsi établie.

Exercice 9.2.3 Soit $(L_i)_{i\in I}$ une famille (éventuellement infinie) de fonctions affines sur V. Montrer que $\sup_{i\in I} L_i$ est convexe sur V. Réciproquement, soit J une fonction convexe continue sur V. Montrer que J est égale au $\sup_{L_i\leq J} L_i$ où les fonctions L_i sont affines.

Correction. Le sup de fonction convexe est une fonction convexe. En effet, une fonction $J : V \to \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si son épigraphe

$$Epi(J) = \{(\lambda, v) \in \mathbb{R} \times V, \, \lambda \geq J(v)\}$$

est convexe. Ainsi, si $J = \sup_{i\in I} J_i$, où J_i sont des fonctions convexes, on a

$$\begin{aligned} Epi(J) &= \{(\lambda, v) \in \mathbb{R} \times V, \, \lambda \geq J_i(v) \text{ pour tout } i \in I\} \\ &= \bigcap_i Epi(J_i). \end{aligned}$$

Une intersection de convexes étant convexe, l'épigraphe de J est convexe. La fonction J est donc convexe.

Réciproquement, supposons que J soit convexe. Soit $v_0 \in V$ et $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda_0 < J(v_0)$, c'est à dire tel que (λ_0, v_0) n'appartienne pas à $Epi(J)$. Notons que l'ensemble $Epi(J)$ est un convexe fermé (fermé car J est continue et convexe car J est convexe). Puisque $(\lambda_0, v_0) \notin Epi(J)$, nous déduisons du Théorème **12.1.19** de séparation d'un point et d'un convexe l'existence de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et d'une forme linéaire continue $T \in V'$ tels que

$$\beta\lambda + T(v) > \alpha > \beta\lambda_0 + T(v_0) \quad \forall\, (\lambda, v) \in Epi(J)\ .$$

Ainsi,

$$\beta J(v) + T(v) > \alpha > \beta\lambda_0 + T(v_0) \quad \forall\, v \in V$$

et

$$\beta J(v) > \beta\lambda_0 + T(v_0) - T(v) \quad \forall\, v \in V.$$

En appliquant l'inégalité précédente à $v = v_0$, on en déduit que β est non nul. De plus, β est nécessairement positif. On a donc

$$J(v) > \lambda_0 + \beta^{-1}(T(v_0) - T(v)) \quad \forall\, v \in V.$$

On pose $L(v) = \lambda_0 + \beta^{-1}(T(v_0) - T(v))$. On a prouvé que pour tout (v_0, λ_0) tel que

$$J(v_0) > \lambda_0,$$

il existe une fonction affine L telle que p

$$J(v_0) > L(v_0) = \lambda_0$$

et $J(v) \geq L(v)$ pour tout $v \in V$. On en déduit que

$$J = \sup_{L_i\leq J} L_i,$$

où les L_i sont des fonctions affines.

Exercice 9.2.4 Si J est continue et α-convexe, montrer que, pour tout $\theta \in [0,1]$,

$$J(\theta u + (1-\theta)v) \leq \theta J(u) + (1-\theta)J(v) - \frac{\alpha\theta(1-\theta)}{2}\|u-v\|^2 . \tag{9.2}$$

Correction. Pour tout n, on note $K_n = \{x \in [0,1] : 2^n x \in \mathbb{N}\}$. Supposons que l'inégalité (9.2) soit vérifiée pour tout $\theta \in K_n$. Soit $\theta \in K_{n+1} \backslash K_n$, il existe $\theta_1, \theta_2 \in K_n$ tels que $\theta_1 < \theta_2$ et $\theta = (\theta_1 + \theta_2)/2$. Comme J est α-convexe,

$$\begin{aligned} J(\theta u + (1-\theta)v) &= J\left(\frac{(\theta_1 u + (1-\theta_1)v) + (\theta_2 u + (1-\theta_2)v)}{2}\right) \\ &\leq \frac{J(\theta_1 u + (1-\theta_1)v) + J(\theta_2 u + (1-\theta_2)v)}{2} + \frac{\alpha}{8}(\theta_2 - \theta_1)^2\|u-v\|^2 \end{aligned}$$

L'inégalité (9.2) ayant été supposée exacte sur K_n, on a donc

$$\begin{aligned} J\left(\theta u + (1-\theta)v\right) \leq\ & \frac{\theta_1 J(u) + (1-\theta_1)J(v) + \theta_2 J(u) + (1-\theta_2)J(v)}{2} \\ &+ \frac{\alpha\theta_1(1-\theta_1) + \alpha(\theta_2(1-\theta_2)}{4}\|u-v\|^2 + \frac{\alpha}{8}(\theta_2-\theta_1)^2\|u-v\|^2. \end{aligned}$$

et

$$J(\theta u + (1-\theta)v) \leq \frac{\theta J(u) + (1-\theta)J(v)}{2} + \frac{\alpha(\theta_1+\theta_2)(2-(\theta_1+\theta_2))}{8}\|u-v\|^2,$$

ce qui prouve que l'inégalité est alors valable pour tout élément de K^{n+1}. On en déduit par récurrence que l'inégalité est valable pour $\theta \in \bigcup_n K^n$. Comme J est continue, l'inégalité reste valable sur l'adhérence de l'union des K_n, c'est à dire sur $[0,1]$.

Exercice 9.2.5 Soit A une matrice symétrique d'ordre N et $b \in \mathbb{R}^N$. Pour $x \in \mathbb{R}^N$, on pose $J(x) = \frac{1}{2}Ax \cdot x - b \cdot x$. Montrer que J est convexe si et seulement si A est semi-définie positive, et que J est strictement convexe si et seulement si A est définie positive. Dans ce dernier cas, montrer que J est aussi fortement convexe et trouver la meilleure constante α.

Correction.

$$\begin{aligned} J((x+y)/2) &= A(x+y)\cdot(x+y)/8 - (b\cdot x + b\cdot y)/2 \\ &= \frac{Ax\cdot x - b\cdot x + Ay\cdot y - b\cdot y}{2} - A(x-y)\cdot(x-y)/8 \\ &= (J(x)+J(y))/2 - A(x-y)\cdot(x-y)/8. \end{aligned}$$

L'application J est donc convexe si et seulement si la matrice A est positive. Elle est strictement convexe si et seulement si A est définie positive. Dans ce cas, elle est fortement convexe et la meilleure constante α est la plus petite valeur propre de A.

Exercice 9.2.6 Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $H^1(\Omega)$ l'espace de Sobolev associé (voir la Définition **4.3.1**). Soit la fonction J définie sur Ω par

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla v(x)|^2 + v(x)^2\right) dx - \int_\Omega f(x)v(x)\,dx\ ,$$

avec $f \in L^2(\Omega)$. Montrer que J est fortement convexe sur $H^1(\Omega)$.

Correction. Soit u et $v \in H^1(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned}
J\left(\frac{u+v}{2}\right) &= \frac{1}{2}\left\|\frac{u+v}{2}\right\|^2_{H^1(\Omega)} - \frac{1}{2}\int_\Omega f(x)(u(x)+v(x))\,dx \\
&= \frac{1}{2}(\|u\|^2_{H^1(\Omega)} + \|v\|^2_{H^1(\Omega)})\frac{1}{2}\left\|\frac{u-v}{2}\right\|^2_{H^1(\Omega)} - \frac{1}{2}\int_\Omega f(x)(u(x)+v(x))\,dx \\
&= \frac{J(u)+J(v)}{2} - \|u-v\|^2_{H^1(\Omega)}/8.
\end{aligned}$$

La fonction J est donc fortement convexe sur $H^1(\Omega)$.

Exercice 9.2.7 Soit $v_0 \in V$ et J une fonction convexe majorée sur une boule de centre v_0. Montrer que J est minorée et continue sur cette boule.

Correction. Sans perte de généralité, on peut supposer que $v_0 = 0$ et $J(0) = 0$ et que J est majorée sur une boule de rayon unité. Soit M un majorant de J sur la boule. Soit v tel que $\|v\| < 1$, on a

$$J(v) = J\left(\|v\|\frac{v}{\|v\|} + (1-\|v\|)0\right) \leq \|v\|J\left(\frac{v}{\|v\|}\right) + (1-\|v\|)J(0) \leq \|v\|M.$$

De plus,

$$\begin{aligned}
0 &= J(0) = J\left(\frac{1}{1+\|v\|}v + \frac{\|v\|}{1+\|v\|}\left(-\frac{v}{\|v\|}\right)\right) \\
&\leq \frac{1}{1+\|v\|}J(v) + \frac{\|v\|}{1+\|v\|}J\left(-\frac{v}{\|v\|}\right) \\
&\leq \frac{1}{1+\|v\|}J(v) + \frac{\|v\|}{1+\|v\|}M.
\end{aligned}$$

Il découle de ces deux inégalités que

$$|J(v)| \leq M\|v\|.$$

Ainsi, J est minorée sur la boule unité et continue en zéro. Enfin, on peut appliquer ce résultat à tout point appartenant à la boule unité ouverte pour conclure que J est continue sur cette dernière.

Exercice 9.2.8 Montrer que le Théorème **9.2.6** d'exsitence d'un minimiseur dans le cas fortement convexe (en dimension infini) s'applique à l'Exemple **9.1.10** du problème de minimisation de

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx - \int_\Omega fv\, dx$$

sur $H^1_0(\Omega)$ où Ω est un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$ et $f \in L^2(\Omega)$ (utiliser l'inégalité de Poincaré).

Correction. En procédant comme lors de l'Exercice **9.2.6**, on montre que

$$J\left(\frac{u+v}{2}\right) = \frac{J(u)+J(v)}{2} - \frac{1}{8}\int_\Omega |\nabla(u-v)|^2 dx.$$

Comme Ω est un ouvert régulier, il existe, d'après l'inégalité de Poincaré, une constante C telle que pour tout $u \in H^1_0(\Omega)$,

$$\int_\Omega |\nabla v|^2 dx \geq C\|u\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

Ainsi,

$$J\left(\frac{u+v}{2}\right) \leq \frac{J(u)+J(v)}{2} - \frac{C}{8}\|u-v\|^2_{H^1(\Omega)}$$

et J est fortement convexe. La fonction J étant d'autre part continue sur $H^1_0(\Omega)$, le Théorème **9.2.6** s'applique et J admet donc un unique minimiseur sur $H^1_0(\Omega)$.

Exercice 9.2.9 Généraliser l'Exercice **9.2.8** aux différents modèles rencontrés au Chapitre **5** : Laplacien avec conditions aux limites de Neumann (voir la Proposition **5.2.16**), élasticité (voir l'Exercice **5.3.3**), Stokes (voir l'Exercice **5.3.10**).

Correction. Dans tout ce qui suit, Ω désigne un ouvert régulier de $\mathbb{R}^N$.
Laplacien avec conditions aux limites de Neumann. L'énergie associée au problème est

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla v|^2 + |v|^2\right) dx - \int_\Omega fv\, dx - \int_{\partial\Omega} gv\, ds, \tag{9.3}$$

avec $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\partial\Omega)$. La fonctionnelle J est fortement convexe, car

$$J\left(\frac{u+v}{2}\right) = \frac{J(u)+J(v)}{2} - \|u-v\|^2_{H^1(\Omega)}/8.$$

De plus J est continue sur $H^1(\Omega)$. Ainsi J admet un unique minimiseur sur $H^1(\Omega)$.
Elasticité. On suppose que la frontière du domaine se décompose en deux parties $\partial\Omega_D$ et $\partial\Omega_N$ de mesures surperficielles non nulles. L'énergie associée au système de l'élasticité est définie pour tout

$$u \in V := \left\{v \in H^1(\Omega)^N \ : \ v = 0 \text{ sur } \Gamma_D\right\}$$

par

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(2\mu|e(v)|^2 + \lambda|\mathrm{div}v|^2\right) dx - \int_\Omega f\cdot v\, dx - \int_{\partial\Omega_N} g\cdot v\, ds,$$

où λ et μ sont les coefficients de Lamé du solide tels que

$$\mu > 0 \text{ et } 2\mu + N\lambda > 0.$$

La fonctionnelle J est continue sur $H^1(\Omega)^N$ et$V$ est un espace de Hilbert. D'autres part, pour tout u et v dans V, on a

$$J\left(\frac{u+v}{2}\right) = \frac{J(u)+J(v)}{2} - \frac{1}{8}\int_\Omega \left(2\mu|e(u-v)|^2 + \lambda|\mathrm{div}(u-v)|^2\right) dx.$$

En utilisant la même inégalité algébrique établie au cours de la démonstration du Théorème **5.3.1**,

$$\int_\Omega 2\mu|e(u-v)|^2 dx + \int_\Omega \lambda|\mathrm{div}(u-v)|^2 dx \geq \nu \int_\Omega |e(u-v)|^2 dx.$$

De plus, d'après l'inégalité (**5.65**)

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|e(v)\|_{L^2(\Omega)}. \tag{9.4}$$

Ainsi,

$$J\left(\frac{u+v}{2}\right) = \frac{J(u)+J(v)}{2} - \frac{C}{8}\|u-v\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

La fonction J est donc fortement convexe et admet donc un minimiseur sur V d'après le Théorème **9.2.6**.

Stokes. L'éanergie associée au système de Stokes est définie pour tout

$$u \in V := \left\{v \in H^1_0(\Omega)^N \text{ tel que div}v = 0\right\}$$

par

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega \mu|\nabla v|^2 dx - \int_\Omega f\cdot v\, dx.$$

La fonctionnelle J est évidemment continue, V est un espace de Hilbert et on peut établir que J est fortement convexe à l'aide de l'inégalité de Poincaré (comme pour l'Exercice **9.2.8**). D'après le Théorème **9.2.6**, J admet donc un minimiseur unique sur V.