Ecole Polytechnique, Promotion X2009
Analyse Numérique et Optimisation (MAP431)
Contrôle Hors Classement du 12 avril 2011

Correction

Problème (14 points).

1. Le problème s'écrit sous la forme

$$\text{Trouver} u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega), \text{ tel que } \forall v \in H_0^1(\Omega),\, a(u_\varepsilon, v) = L(v)\,, \qquad (1)$$

avec $a(\cdot,\cdot)$ la forme bilinéaire définie sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ par

$$\forall u, v \in H_0^1(\Omega)\,,\ a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega_1} \nabla u \cdot \nabla v \, dx$$

et L la forme linéaire sur $H_0^1(\Omega)$ définie par

$$\forall v \in H_0^1(\Omega)\,,\ L(v) = \int_\Omega f v \, dx\,.$$

L'existence et l'unicité d'une solution découlent de l'application du théorème de Lax-Milgram dans $H_0^1(\Omega)$ qui est un espace de Hilbert, à condition de vérifier que L est continue et que a est continue et coercive sur $H_0^1(\Omega)$.

Or

$$\begin{aligned}
\forall v \in H_0^1(\Omega)\,,\ |L(v)| &= \left|\int_\Omega f v \, dx\right| \\
&\leq ||f||_{L^2} ||v||_{L^2} \\
&\leq C ||f||_{L^2} ||v||_{H_0^1}
\end{aligned}$$

où C est la constante de Poincaré de Ω. Ainsi L est continue. De même, a est continue car

$$\begin{aligned}
\forall u, v \in H_0^1(\Omega)\,,\ |a(u,v)| &= \left|\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega_1} \nabla u \cdot \nabla v \, dx\right| \\
&\leq \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) ||u||_{H_0^1} ||v||_{H_0^1}
\end{aligned}$$

Enfin, a est coercive puisque

$$\forall u \in H_0^1(\Omega)\,,\ a(u,u) = \int_\Omega ||\nabla u||^2\,dx + \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega_1} ||\nabla u||^2\,dx \geq ||u||_{H_0^1}^2\,.$$

Prenons $v \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega \setminus \bar{\Omega}_1)$. On peut intégrer par parties la formulation variationnelle car $u_\varepsilon|_{\Omega\setminus\bar{\Omega}_1} \in H^2(\Omega \setminus \bar{\Omega}_1)$. on trouve

$$-\int_{\Omega\setminus\bar{\Omega}_1} \Delta u_\varepsilon v\,dx = \int_{\Omega\setminus\bar{\Omega}_1} fv\,dx$$

soit comme tous les termes sont dans $L^2(\Omega \setminus \bar{\Omega}_1)$

$$-\Delta u_\varepsilon = f \text{ p.p. sur } \Omega \setminus \bar{\Omega}_1\,. \tag{2}$$

En procédant de même sur Ω_1 on trouve

$$-\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\Delta u_\varepsilon = f \text{ p.p. sur } \Omega_1\,. \tag{3}$$

On a par ailleurs $u_\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0$ au sens de la trace (donc presque partout pour la mesure de bord sur $\partial\Omega$). Enfin, il reste une condition sur $\partial\Omega_1$ à expliciter.

On prend donc maintenant $v \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ quelconque. En intégrant par parties on trouve:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla v\,dx \quad &+ \quad \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega_1} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla v\,dx \\
&= \int_{\Omega\setminus\bar{\Omega}_1} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla v\,dx + \left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\int_{\Omega_1} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla v\,dx \\
&= -\int_{\Omega\setminus\bar{\Omega}_1} \Delta u_\varepsilon\,v\,dx - \left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\int_{\Omega_1} \Delta u_\varepsilon\,v\,dx \\
&\qquad + \int_{\partial\Omega_1} \left(\frac{\partial u_\varepsilon^2}{\partial n} - \left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u_\varepsilon^1}{\partial n}\right) v\,ds \\
&= \int_\Omega fv\,dx\,,
\end{aligned}$$

où l'on a noté n la normale à $\partial\Omega_1$ dirigée vers l'intérieur de Ω_1 et u_ε^2 (resp. u_ε^1) la restriction de u_ε à $\Omega \setminus \bar{\Omega}_1$ (resp. Ω_1).

En utilisant (2) et (3), on obtient

$$\forall v \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega),\ \int_{\partial\Omega_1} \left(\frac{\partial u_\varepsilon^2}{\partial n} - \left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u_\varepsilon^1}{\partial n}\right) v\,ds = 0$$

ce qui donne la condition de saut sur l'interface $\partial\Omega_1$ (de nouveau toutes les traces sont dans $L^2(\partial\Omega_1)$)

$$\frac{\partial u_\varepsilon^2}{\partial n} - \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u_\varepsilon^1}{\partial n} = 0 \text{ p.p. sur } \partial\Omega_1\,.$$

Enfin, comme a est symétrique on sait d'après le cours que u_ε est aussi la solution du problème de minimisation

$$\min_{u\in H_0^1(\Omega)} \frac{1}{2}a(u,u) - L(u)$$

et l'on constate que $\frac{1}{2}a(u,u) - L(u) = J_\varepsilon(u)$.

2. On prend $v = u_\varepsilon$ dans la formulation variationnelle du problème. On obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega ||\nabla u_\varepsilon||^2\,dx + \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega_1} ||\nabla u_\varepsilon||^2\,dx &= \int_\Omega f u_\varepsilon \\ &\leq ||f||_{L^2}||u_\varepsilon||_{L^2} \\ &\leq C||f||_{L^2}||u_\varepsilon||_{H_0^1}\end{aligned}$$

où C est la constante de Poincaré de Ω. Ainsi on a

$$||u_\varepsilon||_{H_0^1}^2 \leq C||f||_{L^2}||u_\varepsilon||_{H_0^1}$$

ce qui donne

$$||u_\varepsilon||_{H_0^1} \leq C||f||_{L^2}$$

puis

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega_1} ||\nabla u_\varepsilon||^2\,dx &\leq C||f||_{L^2}||u_\varepsilon||_{H_0^1} \\ &\leq (C||f||_{L^2})^2\,.\end{aligned}$$

On répond ainsi à la question avec $C_1 = C_2 = (C||f||_{L^2})^2$.

3. On sait que $V \subset H_0^1(\Omega)$ qui est un espace de Hilbert. On considère donc une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de V et de Cauchy dans $H_0^1(\Omega)$. On appelle $u_\infty \in H_0^1(\Omega)$ sa limite. Le problème consiste à montrer que $u_\infty \in V$, c'est-à-dire que u_∞ est constant sur Ω_1.

Or on sait que

$$\nabla u_n \longrightarrow \nabla u_\infty$$

dans $L^2(\Omega)$ lorsque $n \to +\infty$, et comme $\nabla u_n|_{\Omega_1} = 0$, on en déduit que $\nabla u_\infty|_{\Omega_1} = 0$. Enfin puisque Ω_1 est connexe, on en déduit que u_∞ est constant sur Ω_1 c'est-à-dire que $u_\infty \in V$.

Ainsi V muni du produit scalaire (et de la norme) H_0^1 est un espace de Hilbert. Le problème proposé est en fait le même problème qu'initialement mais posé sur V (car si $u \in V$ alors $\nabla u = 0$ sur Ω_1)

$$\text{Trouver } u_0 \in V \text{ tel que } \forall v \in V,\ a(u_0, v) = L(v)$$

et par application du théorème de Lax-Milgram il admet une unique solution.

4. En prenant comme fonction test $v \in V$ dans la formulation variationnelle initiale, on a que u_ε vérifie (car $\nabla v = 0$ sur Ω_1)

$$\int_\Omega \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx$$

et d'autre part

$$\int_\Omega \nabla u_0 \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx \,.$$

En soustrayant ces deux équations, on obtient

$$\forall v \in V, \ \int_\Omega \nabla \left(u_\varepsilon - u_0\right) \cdot \nabla v \, dx = 0 \,.$$

On prend alors $v = u_0$, et on arrive à

$$\begin{aligned} \int_\Omega ||\nabla u_0||^2 \, dx &= \int_\Omega \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla v \, dx \\ &\leq ||\nabla u_\varepsilon||_{L^2} ||\nabla u_0||_{L^2} \end{aligned}$$

ce qui donne

$$||u_\varepsilon||_{H_0^1} \geq ||u_0||_{H_0^1} \,.$$

5. Soit $w \in V$. La question **4.** nous dit (en prenant $v = u_0 - w \in V$)

$$\int_\Omega \nabla \left(u_\varepsilon - u_0\right) \cdot \nabla (u_0 - w) \, dx = 0 \,.$$

On en déduit alors que

$$\begin{aligned} \int_\Omega ||\nabla (u_\varepsilon - u_0)||^2 \, dx &= \int_\Omega \nabla (u_\varepsilon - u_0) \cdot \nabla (\varepsilon - u_0) \, dx \\ &= \int_\Omega \nabla (u_\varepsilon - u_0) \cdot \nabla (\varepsilon - u_0 + u_0 - w) \, dx \\ &= \int_\Omega \nabla (u_\varepsilon - u_0) \cdot \nabla (u_\varepsilon - w) \, dx \\ &\leq ||u_\varepsilon - u_0||_{H_0^1} ||u_\varepsilon - w||_{H_0^1} \end{aligned}$$

c'est-à-dire que

$$\forall w \in V,\ ||u_\varepsilon - u_0||_{H_0^1} \leq ||u_\varepsilon - w||_{H_0^1}.$$

En prenant l'inf sur $w \in V$ on obtient

$$||u_\varepsilon - u_0||^2_{H_0^1} \leq \inf_{w\in V} ||u_\varepsilon - w||^2_{H_0^1}.$$

L'inégalité en sens inverse étant évidente ($u_0 \in V$) on obtient l'égalité

$$||u_\varepsilon - u_0||_{H_0^1} = \inf_{w\in V} ||u_\varepsilon - w||_{H_0^1}.$$

Ceci traduit exactement le fait que u_0 est la projection (orthogonale par rapport au produit scalaire H_0^1) de u_ε sur V. En particulier il est intéressant de constater que cette projection ne dépend pas de ε.

6. Soit $v \in V^\perp$ vérifiant $|v|_V = 0$. On a alors $\nabla v = 0$ sur Ω_1 et comme Ω_1 est connexe, v est constante sur Ω_1. Ainsi $v \in V$ et $v \in V \cap V^\perp = \{0\}$.

$|\cdot|_V$ vérifie alors les trois axiomes qui en font une norme sur $V^\perp$:

- $\forall v \in V^\perp$, $|v|_V \geq 0$
- $\forall v \in V^\perp$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $|\lambda v|_V = |\lambda|\, |v|_V$
- Si $v \in V^\perp$ vérifie $|v|_V = 0$ alors $v = 0$

7. On admet que la norme $|\cdot|_V$ est équivalente à la norme H_0^1 sur $V^\perp$, c'est-à-dire

$$\exists \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0,\ \forall v \in V^\perp,\ \alpha_1 ||v||_{H_0^1} \leq |v|_V \leq \alpha_2 ||v||_{H_0^1}.$$

(En fait, on n'utilisera pas l'inégalité de droite.)

On remarque que la question **4.** stipule exactement que $u_\varepsilon - u_0 \in V^\perp$ et on a donc

$$\begin{aligned} ||u_\varepsilon - u_0||_{H_0^1} &\leq \frac{1}{\alpha_1} |u_\varepsilon - u_0|_V \\ &= \frac{1}{\alpha_1}\left(\int_{\Omega_1} ||\nabla(u_\varepsilon - u_0)||^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\alpha_1}\left(\int_{\Omega_1} ||\nabla u_\varepsilon||^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

car $u_0 \in V$ est constant sur Ω_1.

Ceci se majore d'après la question **2.** et on obtient

$$||u_\varepsilon - u_0||_{H_0^1} \leq \frac{1}{\alpha_1} (C_2\varepsilon)^{\frac{1}{2}}$$

ce qui répond à la question avec $C = \frac{\sqrt{C_2}}{\alpha_1}$. On en déduit que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} ||u_\varepsilon - u_0||_{H_0^1} = 0$$

c'est-à-dire que u_ε converge dans $H^1(\Omega)$ vers u_0 lorsque ε tend vers 0.

Exercice (6 points).

1. ATTENTION: Dans le poly seule la notion de stabilité L^2 avec des conditions périodiques au bord a été vue. Le calcul suivant suppose implicitement cette condition.

Pour étudier la stabilité L^2 du schéma, on calcule le facteur d'amplification du schéma. Plus précisément, on pose

$$u^n(x) = u_j^n \text{ pour } x \in](j - \frac{1}{2}\Delta x), (j + \frac{1}{2}\Delta x)[$$

et l'on décompose u^n en une somme de Fourier

$$u^n(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{u}^n(k) \exp(2i\pi kx) .$$

Le schéma se réécrit sous la forme

$$\frac{u^{n+1}(x) - u^n(x)}{\Delta t} + c\left(\theta\frac{u^n(x+\Delta x) - u^n(x)}{\Delta x} + (1-\theta)\frac{u^n(x) - u^n(x-\Delta x)}{\Delta x}\right) = 0 .$$

En appliquant la transformée de Fourier, on obtient

$$\hat{u}^{n+1}(k) = A(k)\hat{u}^n(k)$$

où le facteur d'amplification $A(k)$ est donné par

$$\begin{aligned} A(k) &= 1 - c\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\theta(\exp(2i\pi k\Delta x) - 1) + (1-\theta)(1 - \exp(-2i\pi k\Delta x))\right) \\ &= 1 - \lambda((1-2\theta)(1 - \cos(2k\pi\Delta x)) + i\sin(2k\pi\Delta x)) \\ &= 1 - \lambda((1-2\theta)(2\sin^2(k\pi\Delta x)) + 2i\sin(k\pi\Delta x)\cos(k\pi\Delta x)) \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}|A(k)|^2-1 &= 4\lambda\sin^2(k\pi\Delta x)\left((2\theta-1)+\lambda(1-2\theta)^2\sin^2(k\pi\Delta x)+\lambda\cos^2(k\pi\Delta x)\right)\\ &= 4\lambda\sin^2(k\pi\Delta x)\left(2\theta-1+\lambda+\lambda(4\theta^2-4\theta)\sin^2(k\pi\Delta x)\right)\end{aligned}$$

Le schéma sera stable si et seulement si $|A(k)|^2-1\le 0$ pour tout $k\in\mathbb{Z}$, c'est-à-dire

$$\lambda\left(2\theta-1+\lambda+\lambda(4\theta^2-4\theta)\sin^2(k\pi\Delta x)\right)\le 0\ \forall k\in\mathbb{Z}\,.$$

Comme $-\frac{1}{4}\le\theta^2-\theta\le 0$, il s'agit d'un polynôme du second degré en λ de coefficient principal positif et l'on trouve que le schéma est stable si et seulement si la condition de type CFL suivante est vérifiée

$$1-2\theta\le\lambda\le 0 \text{ ou } 0\le\lambda\le 1-2\theta\,. \tag{4}$$

En particulier la condition précédente oblige de décentrer dans "la bonne direction". Si $\lambda\le 0$, il faudra prendre pour avoir stabilité $\theta\ge\frac{1-\lambda}{2}\ge\frac{1}{2}$ et inversement si $\lambda\ge 0$.

2. On montre d'abord que le schéma est consistant avec l'équation d'advection. Soit $u(x,t)$ une solution régulière de l'équation d'advection. L'erreur de troncature liée au schéma est donnée par

$$\begin{aligned}e_j^n &= \frac{u((n+1)\Delta t,j\Delta x)-u(n\Delta t,j\Delta x)}{\Delta t}+c\theta\frac{u(n\Delta t,(j+1)\Delta x)-u(n\Delta t,j\Delta x)}{\Delta x}\\ &\qquad +c(1-\theta)\frac{u(n\Delta t,j\Delta x)-u(n\Delta t,(j-1)\Delta x)}{\Delta x}\,.\end{aligned}$$

En faisant un développement limité, on trouve

$$\begin{aligned}e_j^n &= \frac{\partial u}{\partial t}(n\Delta t,j\Delta x)+O(\Delta t)+c\theta\frac{\partial u}{\partial x}(n\Delta t,j\Delta x)+c(1-\theta)\frac{\partial u}{\partial x}(n\Delta t,j\Delta x)+O(\Delta x)\\ &= \frac{\partial u}{\partial t}(n\Delta t,j\Delta x)+c\frac{\partial u}{\partial x}(n\Delta t,j\Delta x)+O(\Delta t+\Delta x)\,.\end{aligned}$$

Comme u est solution de l'équation d'advection, l'erreur de consistance tend vers 0 lorsque Δt et Δx tendent vers 0, et le schéma est donc consistant avec l'équation d'advection.

En appliquant le théorème de Lax, le schéma sera convergent pour la norme L^2 sous la condition de stabilité (4).