ECOLE POLYTECHNIQUE – Promotion 2009
Analyse Numérique et Optimisation (MAP431)

Examen classant du lundi 27 juin 2011

Durée : 4 heures

Sujet proposé par A. Chambolle et H. Haddar

Le sujet se compose de deux problèmes totalement indépendants. Il compte 8 pages en tout. Chaque problème est à rédiger sur des copies de couleurs distinctes, blanches pour le problème 1 et vertes pour le problème 2.

Problème 1 : Un problème de transmission intérieur (Copies blanches, noté sur 11)

Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^2$. On note par $\partial\Omega$ sa frontière et par n la normale à $\partial\Omega$ dirigée vers l'extérieur de Ω. On s'intéresse à la résolution du problème couplé suivant

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(k_1 \nabla u_1) + \alpha_1 u_1 = f_1 \quad \text{dans } \Omega, \\ -\mathrm{div}(k_2 \nabla u_2) + \alpha_2 u_2 = f_2 \quad \text{dans } \Omega, \\ u_1 = u_2 \quad \text{sur } \partial\Omega, \\ k_1 \dfrac{\partial u_1}{\partial n} = k_2 \dfrac{\partial u_2}{\partial n} \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

où pour $i = 1$ et 2, $f_i \in L^2(\Omega)$, $k_i \in L^\infty(\Omega)$, $\alpha_i \in L^\infty(\Omega)$,

$$k_i(x) \geq k > 0 \quad \text{et} \quad \alpha_i(x) \geq \alpha > 0$$

pour presque tout x dans Ω.

Partie I. Approche variationnelle naturelle

Question 1. On introduit l'espace

$$V := \{v = (v_1, v_2) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega);\ \text{tq. } v_1 = v_2 \ \text{(au sens de la trace) sur } \partial\Omega\}. \tag{2}$$

muni de la norme

$$\|v\|_V^2 := \|v_1\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|v_2\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

1.a Montrer que V est un espace de Hilbert.

1.b Montrer qu'une formulation variationnelle du problème (1) s'écrit sous la forme : Chercher $u = (u_1, u_2) \in V$ tq.

$$a(u, v) = \ell(v) \quad \forall v \in V, \tag{3}$$

avec :

$$a(u, v) := \int_\Omega (k_1 \nabla u_1 \nabla v_1 + \alpha_1 \, u_1 v_1) \, dx - \int_\Omega (k_2 \nabla u_2 \nabla v_2 + \alpha_2 \, u_2 v_2) \, dx$$

$$\ell(v) := \int_\Omega (f_1 v_1 - f_2 v_2) \, dx$$

Question 2. Montrer que $a : V \times V \to \mathbb{R}$ et $\ell : V \to \mathbb{R}$ sont continues. Montrer que la forme bilinéaire a n'est pas coercive.

Question 3. Montrer qu'il n'y pas unicité des solutions $(u_1, u_2) \in V$ de (3) si elles existent dans le cas $k_1 = k_2$ et $\alpha_1 = \alpha_2$. Indication : On pourra considérer (après justification de son existence) la solution $u_0 \in H^1(\Omega)$ du problème variationnel

$$\int_\Omega (k_1 \nabla u_0 \, \nabla v_0 + \alpha_1 \, u_0 \, v_0) \, dx = \int_{\partial\Omega} g \, v_0 \, ds \quad \forall v_0 \in H^1(\Omega),$$

où $g \in L^2(\partial\Omega)$ est une fonction non nulle donnée.

Partie II. Etude du cas $k_1 \neq k_2$. On supposera dans cette partie qu'il existe une constante $\delta > 0$ tq.

$$k_1(x) - k_2(x) \geq \delta k_1(x) \quad \text{et} \quad \alpha_1(x) - \alpha_2(x) \geq \delta \alpha_1(x)$$

pour presque tout x dans Ω.

Question 4. Soit T un isomorphisme (application linéaire bijective continue et d'inverse continue) de V dans V tq. la forme bilinéaire $a_T : V \times V \to \mathbb{R}$ définie par

$$a_T(u, v) := a(u, Tv) \quad \forall u, \, v \in V$$

soit coercive. Montrer que dans ce cas le problème (3) admet une solution unique qui dépend continûment de ℓ.

Question 5. Montrer à l'aide de l'application T définie par $T(v) = (v_1, 2v_1 - v_2)$ que le problème (3) est bien posé.

Question 6. On note X_h l'espace des éléments finis P_1 de Lagrange construit sur une triangulation $\mathcal{T}_h$ de Ω. On suppose que la famille de triangulation $\mathcal{T}_h$ indexée par h est régulière. On note N la dimension de X_h et M le nombre de noeuds sur la frontière $\partial\Omega$.

6.a Construire à l'aide de X_h un espace d'approximation V_h de V. Quelle est la dimension de V_h ?

6.b On note $u_h \in V_h$ la solution de

$$a(u_h, v_h) = \ell(v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \tag{4}$$

Montrer la convergence de u_h vers u dans V lorsque $h \to 0$ et préciser la vitesse de convergence en supposant $u \in H^2(\Omega) \times H^2(\Omega)$.

Partie III. Etude du cas $k_1 = k_2$.

On supposera dans cette partie (pour simplifier) que $k_1 = k_2 = 1$. Dans ce cas le problème (1) s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} -\Delta u_1 + \alpha_1 u_1 = f_1 \quad \text{dans } \Omega, \\ -\Delta u_2 + \alpha_2 u_2 = f_2 \quad \text{dans } \Omega, \\ u_1 - u_2 = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial n} - \dfrac{\partial u_2}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{5}$$

Question 7. Montrer que $r \mapsto \log(r)$ n'appartient pas à $H^1(\{(r,\theta), r \leq \delta, 0 < \theta < \theta_0\})$ pour tout $\delta > 0$ et $\theta_0 > 0$. En déduire à l'aide d'un exemple l'existence de solutions de (5) qui ne sont pas dans V. Indication : considérer la fonction $x \mapsto \log|x - x_0|$ qui est à Laplacien nul sur tout ouvert ne contenant pas x_0 et prendre $x_0 \in \partial\Omega$.

On appellera désormais une solution faible de (5) tout couple $(u_1, u_2) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ vérifiant les équations sur Ω au sens de la dérivation faible et tq. $u_1 - u_2 \in H^2(\Omega)$ et les conditions aux limites sont vérifiées au sens des fonctions de $L^2(\partial\Omega)$. On rappelle que

$$H_0^2(\Omega) := \{w \in H^2(\Omega) \ \text{ tq. } w = 0 \ \text{ et } \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \ \text{ sur } \ \partial\Omega\}.$$

Question 8. On supposera dans cette question que $\alpha_1(x) - \alpha_2(x) \geq \alpha_* > 0$ pour presque tout x dans Ω.

8.a Montrer que l'existence d'une solution faible (u_1, u_2) de (5) est équivalente à l'existence de $w = u_1 - u_2 \in H_0^2(\Omega)$ vérifiant (au sens de la dérivation faible)

$$(-\Delta + \alpha_2)\left(\frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2}(-\Delta w + \alpha_1 w)\right) = -\Delta\left(\frac{f_1 - f_2}{\alpha_1 - \alpha_2}\right) + \frac{\alpha_2 f_1 - \alpha_1 f_2}{\alpha_1 - \alpha_2} \quad \text{dans } \Omega. \tag{6}$$

8.b On admettra que $w \mapsto \|\Delta w\|_{L^2(\Omega)}$ est une norme équivalente à la norme $H^2(\Omega)$ sur l'espace $H_0^2(\Omega)$. En déduire que $w \mapsto \|-\Delta w + \alpha_2 w\|_{L^2(\Omega)}$ est également une norme équivalente à la norme $H^2(\Omega)$ sur l'espace $H_0^2(\Omega)$ (on pourra utiliser par exemple un raisonnement par contradiction).

8.c Ecrire la formulation variationnelle du problème (6) et montrer son caractère bien posé. Indication : pour étudier la coercivité, on fera apparaître dans la forme bilinéaire prise en (w, w) des termes en $|-\Delta w + \alpha_2 w|^2$, en $|\nabla w|^2$ et en $|w|^2$.

Question 9. On supposera dans cette question que $\alpha_1(x) - \alpha_2(x) \geq \alpha_* > 0$ pour presque tout x dans $\Omega \setminus \Omega_0$ et que $\alpha_1(x) = \alpha_2(x)$ pour presque tout x dans Ω_0 où Ω_0 désigne un domaine régulier strictement inclus dans Ω. On supposera pour simplifier que $f_1 = f_2 = f$ et que f est à support compact dans $\Omega \setminus \overline{\Omega}_0$. On pose

$$W := \{w \in H_0^2(\Omega);\ \text{tq.}\ -\Delta w + \alpha_1 w = 0 \text{ dans } \Omega_0\}.$$

9.a Montrer que W muni de la norme $H^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

9.b Montrer que si $(u_1, u_2) \in H^2(\Omega) \times H^2(\Omega)$ est une solution de (5) alors $w = u_1 - u_2 \in W$ et vérifie

$$\int_{\Omega\setminus\Omega_0} \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2}(-\Delta w + \alpha_1 w)(-\Delta w' + \alpha_2 w')\, dx = -\int_{\Omega\setminus\Omega_0} f w' dx \tag{7}$$

pour tout $w' \in W$.

9.c Montrer le caractère bien posé de la formulation variationnelle (7).

9.d (question bonus optionnelle) On admettra que les traces sur $\partial\Omega_0$ de fonctions dans W sont denses dans $L^2(\partial\Omega_0)$ et que pour toute fonction h trace sur $\partial\Omega_0$ d'une fonction de $H^2(\Omega \setminus \Omega_0)$ il existe une fonction $R(h) \in H^2(\Omega_0)$ tq.

$$\begin{cases} -\Delta R(h) + \alpha_1 R(h) = 0 \text{ dans } \Omega_0, \\ R(h) = h \text{ sur } \partial\Omega_0. \end{cases}$$

En déduire que si h est la trace sur $\partial\Omega_0$ d'une fonction de $H^2(\Omega \setminus \Omega_0)$ et si $g \in L^2(\partial\Omega_0)$ vérifie

$$\int_{\partial\Omega_0} \left(g w' - h \frac{\partial w'}{\partial n} \right) ds = 0 \quad \forall w' \in W,$$

alors $g = \dfrac{\partial R(h)}{\partial n}$ sur $\partial\Omega_0$, où n désigne ici la normale à $\partial\Omega_0$ dirigée vers l'extérieur de Ω_0.

9.e (question bonus optionnelle) On suppose que la solution de (7) est dans $H^4(\Omega \setminus \overline{\Omega}_0)$. En déduire l'existence de solutions $(u_1, u_2) \in H^2(\Omega) \times H^2(\Omega)$ de (5).

Remarque : En fait il est également possible de construire à partir de toute solution de (7) (sans hypothèse de régularité supplémentaire) une solution faible de (5).

Problème 2 : La forme d'une goutte d'eau
(Copies vertes, noté sur 9)

On s'intéresse au problème du calcul de la forme d'équilibre d'une goutte (d'eau, par exemple) posée sur une surface plane et horizontale. Si on néglige la gravité (ce qui est

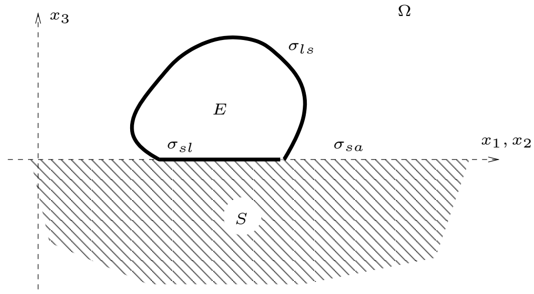

Figure 1: Le problème : trouver la forme de la goutte E

plausible si la goutte est très petite), le système va minimiser une énergie composée de trois termes :

1. un terme proportionnel à la surface de l'interface entre l'eau et l'air, avec un facteur de proportionnalité $\sigma_{la} > 0$, la "tension superficielle" de l'eau;
2. un terme proportionnel à la surface du substrat solide qui est mouillée par la goutte, avec le facteur $\sigma_{sl} > 0$;
3. et un terme d'énergie proportionnel à la surface qui n'est pas mouillée, avec un coefficient $\sigma_{sa} > 0$. Ce dernier terme peut-être remplacé, à une constante près, par la surface mouillée multipliée par le coefficient négatif $-\sigma_{sa}$.

Ici, "l" est pour "liquide", "s" pour "solide" ou "substrat", "a" pour "air".

Pour simplifier, on va se placer dans le cas bidimensionnel (le volume de la goutte devient donc son aire, la surface des interfaces devient leur longueur). On suppose que l'air occupe la région Ω et le substrat solide la région S, définies respectivement par :

$$\Omega = \left\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x_2 > 0\right\} \ , \qquad S = \left\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x_2 \leq 0\right\} \ .$$

On cherche la forme des gouttes d'énergie minimale, à aire $V > 0$ donnée. Le problème à résoudre consiste donc à trouver, parmi tous les ouverts $E \subset \Omega$, tels que $|E| = V$ ($|E|$ étant la mesure de Lebesgue, donc l'aire de E), les ensembles qui minimisent

$$\sigma_{la} \times (\text{longueur de}\, \partial E \setminus \partial\Omega) \,+\, (\sigma_{sl} - \sigma_{sa}) \times (\text{longueur de}\, \partial E \cap \partial\Omega).$$

Si on pose

$$\bar{\sigma} \;=\; \frac{\sigma_{sl} - \sigma_{sa}}{\sigma_{la}} \,,$$

l'ensemble décrivant la goutte est alors un minimiseur de

$$\mathcal{E}(E) \;=\; (\text{longueur de}\,\partial E\setminus\partial\Omega) \;+\; \bar{\sigma}\times(\text{longueur de}\,\partial E\cap\partial\Omega). \tag{8}$$

On va chercher à caractériser les minimiseurs de cette énergie parmi les ensembles $E\subset\Omega$, sous contrainte d'aire donnée $|E| = V$.

Question 1. On va toujours supposer que les énergies sont telles que

$$\begin{aligned}\sigma_{sl}+\sigma_{la} &\;\geq\; \sigma_{sa}\\ \sigma_{sa}+\sigma_{la} &\;\geq\; \sigma_{sl},\end{aligned}$$

qu'en déduit-on pour $\bar{\sigma}$?

Partie I. Dans cette première partie, on va demander des raisonnements un peu formels, c'est-à-dire qu'on ne vous demande pas de justifier par des calculs compliqués ce qui ressort clairement d'un dessin ou d'une explication.

On admet l'inégalité isopérimétrique dans $\mathbb{R}^2$:

$$|E| \;\leq\; \frac{1}{4\pi}(\text{périmètre de}\,E)^2 \tag{9}$$

pour tout ensemble E dont le périmètre, c'est à dire la longueur totale du bord ∂E, est bien défini. De plus, l'inégalité (9) est une égalité *si et seulement si E est un disque.*

Question 2. Quelle est la forme d'une goutte d'aire donnée V, sans gravité, qui ne touche pas la ligne ∂S ?

On considère désormais une goutte E d'aire $|E| = V$, posée sur ∂S, et minimisant l'énergie (8).

Question 3. Si on suppose que $\bar{\sigma} = 0$, quel problème de minimisation résout l'ensemble $F = E\cup\{(x,y)\,:\,(x,-y)\in E\}\subset\mathbb{R}^2$? Quelle est la forme de E dans ce cas ?

On se place dans le cas où la ligne de contact $\partial E\cap\partial S$ est connexe : quitte à effectuer une translation, on suppose donc que $\partial E\cap\partial S = [-a,a]\times\{0\}$.

Question 4. Pour tout $\bar{y}\in\mathbb{R}$, on considère le disque $D(\bar{y})$ de centre $(0,\bar{y})$ et passant par les points $(-a,0)$ et $(0,a)$. On définit alors $v(\bar{y}) = |D(\bar{y})\cap\Omega|$ (l'aire de la calotte du disque dans le demi-plan supérieur).

4.a. Que peut-on dire de l'application $\bar{y}\mapsto v(\bar{y})$? Pour $V>0$ donné, justifier qu'il existe un et un seul disque $D = D(\bar{y})$ tel que $v(\bar{y}) = V$.

4.b. On considère donc ce disque D, et une goutte E d'aire $|E| = V$ et d'énergie minimale. On définit l'ensemble $D' = E\cup(D\cap S)$. Quelle est l'aire totale de D' ? Quel est la longueur du bord de D' ? En déduire que nécessairement, $E = \tilde{E}$. Quelle est donc la forme d'une goutte bidimensionnelle posée sur le substrat ∂S ?

Partie II. On va maintenant essayer de retrouver le résultat précédent par une méthode analytique, du moins lorsque le bord $\partial E \cap \Omega$ peut être décrit par un graphe. On peut montrer que c'est effectivement le cas si la surface est hydrophile, c'est-à-dire quand $\bar{\sigma} < 0$.

On suppose donc que $E = \{(x, y) : -a < x < a, 0 < y < h(x)\}$ où h est une fonction positive, continue, vérifiant

$$\int_{-a}^{a} h(x)\, dx \; = \; V\,. \tag{10}$$

L'énergie (8) devient

$$\mathcal{E}(a, h) \; = \; \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + h'(x)^2}\, dx \; + \; 2\bar{\sigma}\, a \tag{11}$$

à condition de supposer que $h > 0$ p.p. dans $(-a, a)$.

Question 5. On suppose que $a > 0$ est connu, et on admet l'existence d'un minimiseur $h \in H^1(-a, a)$ de $\mathcal{F}_a(h) = \mathcal{E}(a, h)$, parmi toutes les fonctions positives vérifiant (10). On cherche l'équation vérifiée par h.

On suppose que $h(x) > 0$ pour $x \in]-a, a[$ (la contrainte $h \geq 0$ n'est pas saturée). A quelles conditions sur $\phi \in C_c^\infty(-a, a)$ et sur $t \in \mathbb{R}$, la fonction $h + t\phi$ est-elle admissible dans le problème de minimisation vérifié par h ? En calculant la dérivée en $t = 0$ de

$$t \mapsto \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + (h' + t\phi')(x)^2}\, dx$$

montrer que h vérifie :

$$\int_{-a}^{a} \frac{h'(x)\phi'(x)}{\sqrt{1 + h'(x)^2}}\, dx \; = \; 0\,.$$

Question 6. On pose $F(p) = \sqrt{1 + |p|^2}$. Calculer les dérivées première et seconde de F. Montrer que F est strictement convexe, sans être α-convexe. Qu'en déduit-on pour le minimiseur h de $\mathcal{F}_a$, à aire V prescrite ?

Question 7.

7.a. On considère une fonction $f \in L^2(-a, a)$ telle que pour toute $\phi \in C_c^\infty(-a, a)$ avec $\int_{-a}^{a} \phi(x)\, dx = 0$, on a

$$\int_{-a}^{a} f(x)\phi'(x)\, dx \; = \; 0\,.$$

Montrer que f a une dérivée faible de f dans $L^2(-a, a)$, et que celle-ci est constante.

7.b. Montrer que $h'/\sqrt{1 + h'^2}$ est affine. En particulier, h vérifie le problème variationnel

$$\int_{-a}^{a} \frac{h'(x)}{\sqrt{1 + h'(x)^2}} \phi'(x)\, dx \; - \; \lambda \int_{-a}^{a} \phi(x)\, dx \; = \; 0 \tag{12}$$

pour tout $\phi \in C_c^\infty(-a, a)$, et pour un certain paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$. Quelle est la signification de λ ?

Question 8. On va supposer que $\lambda \geq 0$. Résoudre l'équation différentielle vérifiée par h solution du problème variationnel (12) (on rappelle qu'on suppose $a > 0, V > 0$). Vérifier qu'on trouve l'équation d'un arc de cercle : quel est son rayon ? son centre ?

Question 9. On rappelle que l'aire d'un secteur d'angle α (radians) d'un disque de rayon $R > 0$ est $\alpha R^2/2$, tandis que la longueur de l'arc est αR. On introduit l'angle α correspondant à la demi-ouverture du secteur angulaire qui définit l'arc de cercle de la question précédente (voir Fig. 2). Exprimer l'aire V et l'énergie totale $\mathcal{E}$ en fonction de R et α.

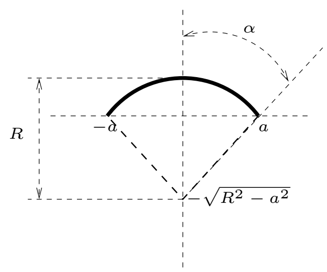

Figure 2: La goutte en 2 dimensions

Ecrire le problème de minimisation sous contrainte de l'énergie à aire V fixée, en fonction de α, R. On suppose que $\bar{\sigma} \in]-1, 0[$ et on admet l'existence d'une solution : écrire alors les équations satisfaites par le couple (α, R) qui minimise le problème (on introduira notamment le multiplicateur de Lagrange λ associé à la contrainte d'aire).

Trouver alors la relation liant λ et R, puis celle qui lie $\bar{\sigma}$ et α. A quoi doit-on s'attendre si maintenant $\bar{\sigma} > 0$?