

ECOLE POLYTECHNIQUE – Promotion 2010
Analyse Numérique et Optimisation (MAP431)

Examen classant du 06 juillet 2012
Durée : 4 heures

Sujet proposé par X. Blanc et F. Bonnans

Le sujet se compose de deux problèmes totalement indépendants. Chaque problème est à rédiger sur des copies de couleurs distinctes, blanches pour le problème 1 et vertes pour le problème 2.

**Problème 1 : Équation des ondes
(Copies vertes, noté sur 13)**

Soit Ω un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^d , avec $d \in \mathbb{N}^*$. On note $\partial\Omega$ sa frontière. Pour $T > 0$ fixé, on s'intéresse à la résolution du problème suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \operatorname{div}(F(\nabla u)) = 0, & \text{dans } \Omega \times]0, T[, \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[, \end{cases} \quad (1)$$

assorti des conditions initiales

$$\begin{cases} u(x, t = 0) = u_0(x), & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, t = 0) = u_1(x), & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (2)$$

L'application $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ sera supposée de classe C^∞ .

Partie I. Le cas linéaire – étude théorique. On suppose dans cette partie que la fonction F est égale à l'identité :

$$\forall y \in \mathbb{R}^d, \quad F(y) = y.$$

Le système (1)-(2) devient alors l'équation des ondes "standard".

Question 1. On commence par s'intéresser au cas de solutions particulières de (1), de la forme

$$u(x, t) = v(x)e^{i\omega t}.$$

1.a. Écrire le système vérifié par la fonction v et le réel ω .

1.b. Écrire la formulation variationnelle associée au problème vérifié par v et ω sous la forme

$$\forall w \in X, \quad a(v, w) = \omega^2 \int_{\Omega} vw,$$

où on précisera l'espace X et la forme bilinéaire a .

1.c. Démontrer que la forme bilinéaire a associée à la formulation variationnelle de la question 1.b est coercive sur l'espace de Hilbert X .

1.d. On rappelle que, d'après le cours, le couple (ω, v) peut prendre un ensemble discret de valeurs $(v_k, \omega_k)_{k \in \mathbb{N}}$. En dimension 1, dans le cas où $\Omega =]0, 1[$, déterminer explicitement les valeurs de v_k et ω_k .

Question 2. Écrire la formulation variationnelle du système (1)-(2).

Question 3. Démontrer que la formulation variationnelle définie à la question 2 admet une unique solution. On appliquera pour cela un résultat de cours, et on précisera les espaces fonctionnels utilisés pour u_0 , u_1 et u .

Question 4. On suppose que $u \in C^2(\Omega \times [0, T])$, de sorte que (1)-(2) est vérifié au sens classique.

4.a. En intégrant la première ligne de (1) contre une fonction bien choisie, démontrer l'égalité d'énergie :

$$\forall t \in [0, T[, \quad \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 (x, t) dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^2(x, t) dx = \int_{\Omega} u_1^2(x) dx + \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2(x) dx. \quad (3)$$

4.b. Démontrer que

$$\forall t_0 \in [0, T[, \quad \int_0^{t_0} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 (x, t) dx dt + \int_{\Omega} u_0(x) u_1(x) dx = \int_0^{t_0} \int_{\Omega} |\nabla u|^2(x, t) dx dt + \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t_0) u(x, t_0) dx \quad (4)$$

4.c. Dans le cas $T = \infty$, déduire de (3) et (4) que

$$\begin{aligned} \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 (x, t) dx dt &= \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} \int_{\Omega} |\nabla u|^2(x, t) dx dt \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_{\Omega} u_1^2(x) dx + \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2(x) dx \right). \end{aligned}$$

Question 5. Par quel argument simple peut-on généraliser les résultats de la question 4 aux $u \in C^0([0, T], H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, T], L^2(\Omega))$ (on ne demande pas de faire la preuve) ?

Partie II. Le cas linéaire – méthode d’éléments finis. La fonction F est toujours égale à l’identité, et on s’intéresse ici à la discrétisation de (1)-(2). Pour cela, on considère un sous-espace V_h de dimension finie N_h de $H_0^1(\Omega)$. On se donne donc $u_{h,0} \in V_h$ et $u_{h,1} \in V_h$ des approximations de u_0 et u_1 , respectivement.

On se donne une base $(\phi_i)_{1 \leq i \leq N_h}$ de V_h , et on cherche $u_h = u_h(t) \in V_h$ sous la forme

$$u_h(t) = \sum_{i=1}^{N_h} U_i(t) \phi_i,$$

où les U_i sont des applications de $[0, T[$ dans \mathbb{R} . Les vecteurs $U^{h,0} \in \mathbb{R}^{N_h}$ et $U^{h,1} \in \mathbb{R}^{N_h}$ désignent, respectivement, la décomposition de $u_{h,0}$ et de $u_{h,1}$ sur la base des ϕ_i .

Question 6. En utilisant une approximation de Galerkin de la formulation variationnelle de (1)-(2), démontrer que le vecteur $U = (U_i)_{1 \leq i \leq N_h}$ est solution du système

$$\begin{cases} M_h \frac{d^2 U}{dt^2} + K_h U = 0, & t \in]0, T[, \\ U(0) = U^{h,0}, \quad \frac{dU}{dt}(0) = U^{h,1}, \end{cases} \quad (5)$$

en précisant les matrices M_h et K_h en fonction de la base $(\phi_i)_{1 \leq i \leq N_h}$.

Question 7. Démontrer que les matrices M_h et K_h sont symétriques définies positives.

Question 8. Démontrer que le système (5) vérifie une conservation d’énergie du même type que (3).

Question 9. Pour discrétiser en temps le système (5), on fixe $\Delta t > 0$, et on propose le schéma aux différences finies suivant :

$$\begin{cases} M_h \frac{U^{n+1} - 2U^n + U^{n-1}}{\Delta t^2} + K_h U^n = 0, \\ U^0 = U^{h,0}, \quad \frac{U^1 - U^0}{\Delta t} = U^{h,1}, \end{cases} \quad (6)$$

9.a. Démontrer que le schéma (6) est consistant avec (5), d’ordre 2 en temps.

9.b. On considère problème aux valeurs propres généralisé suivant :

$$K_h U = \lambda M_h U, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad U \in \mathbb{R}^{N_h}.$$

Démontrer qu’il N_h couples valeur propre-vecteur propre $(\lambda_i, V^i)_{1 \leq i \leq N_h}$ solutions de ce problème tels que $(V^i)_{1 \leq i \leq N_h}$ forme une base de \mathbb{R}^{N_h} , et que $\forall i / 1 \leq i \leq N_h, \lambda_i > 0$.

9.c. Démontrer que le schéma (6) est stable au sens de von Neumann sous la condition CFL

$$\Delta t \sqrt{\max_{1 \leq i \leq N_h} \lambda_i} < 2.$$

9.d. Proposer une variante de (6) inconditionnellement stable.

Question 10. Démontrer que le schéma (6) vérifie la relation

$$\forall n \geq 0, \quad \frac{1}{\Delta t^2} M_h (U^{n+1} - U^n) \cdot (U^{n+1} - U^n) + K_h U^n \cdot U^{n+1} = \frac{1}{\Delta t^2} M_h (U^1 - U^0) \cdot (U^1 - U^0) + K_h U^0 \cdot U^1. \quad (7)$$

Question 11. Quel est le lien entre (3) et (7) ?

Partie III. Le cas non linéaire On suppose maintenant que F est une fonction régulière quelconque, qui vérifie

$$F(y) = \nabla G(y),$$

avec $G : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$, régulière telle que

$$\forall y \in \mathbb{R}^d, \quad \alpha |y|^2 \leq G(y) \leq \beta |y|^2,$$

où $0 < \alpha < \beta$ sont des constantes indépendantes de y .

Question 12. On suppose dans un premier temps que la solution u existe et est de classe C^2 . Démontrer que u vérifie une conservation d'énergie du même type que (3).

Question 13. En déduire

$$\forall t \in [0, T[, \quad \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 (x, t) dx + \alpha \int_{\Omega} |\nabla u|^2 (x, t) dx \leq C(u_0, u_1), \quad (8)$$

où $C(u_0, u_1)$ est une fonction de u_0, u_1 indépendante de t que l'on précisera.

Dans toute la suite, on se place en dimension 1 d'espace, avec comme domaine $\Omega =]-1, 1[$.

Question 14. On écrit une formulation faible de (1)-(2) comme suit :

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega \times [0, T[), \quad & \int_0^T \int_{\Omega} u(x, t) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} (x, t) dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} F \left(\frac{\partial u}{\partial x} (x, t) \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} (x, t) dx dt \\ & = \int_{\Omega} u_1(x) \varphi(x, 0) dx - \int_{\Omega} u_0(x) \frac{\partial \varphi}{\partial t} (x, 0) dx. \end{aligned} \quad (9)$$

Démontrer que si u est une solution de classe C^2 de (1)-(2), alors elle vérifie (9).

Question 15. (Question "bonus")

15.a. Démontrer que $F(0) = 0$. Dans la suite, on supposera que $F(1) = -F(-1) > 0$, et on posera $c = \sqrt{F(1)}$.

15.b. On suppose que $cT < 1$. Soit la fonction

$$u(x, t) = \frac{1}{2}|x - ct| + \frac{1}{2}|x + ct| - 1. \quad (10)$$

Démontrer que, pour tout $t < T$, la fonction $x \mapsto u(x, t)$ est dans $H_0^1(\Omega)$. Calculer $\frac{\partial u}{\partial x}$.

15.c. Démontrer que u définie par (10) est solution de (9) pour des valeurs de u_0 et u_1 que l'on précisera.

15.d. Cette solution vérifie-t-elle la conservation d'énergie démontrée à la question 12 ? Pourquoi ?

**Problème 2 : Pénalisation logarithmique
(Copies blanches, noté sur 7)**

Partie I. Optimisation quadratique convexe, dimension finie On note \mathbb{R}_+^n et \mathbb{R}_{++}^n les ensembles suivants:

$$\mathbb{R}_+^n := \{x \in \mathbb{R}^n; x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}; \quad \mathbb{R}_{++}^n := \{x \in \mathbb{R}^n; x_i > 0, i = 1, \dots, n\}. \quad (11)$$

Soient A une matrice symétrique définie positive de taille n , et $c \in \mathbb{R}^n$. Il existe donc $\alpha > 0$ tel que $Ax \cdot x \geq \alpha|x|^2$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. On pose $F(x) := c \cdot x + \frac{1}{2}Ax \cdot x$, et pour $\varepsilon > 0$,

$$F_\varepsilon(x) = F(x) - \varepsilon \sum_{i=1}^n \log(x_i) \quad \text{si } x \in \mathbb{R}_{++}^n, \text{ et } +\infty \text{ sinon.} \quad (12)$$

On étudie les liens entre le problème de minimisation de F sur \mathbb{R}_+^n et son approximation par pénalisation logarithmique:

$$\min_x F(x); \quad x \in \mathbb{R}_+^n, \quad (QP)$$

$$\min_x F_\varepsilon(x); \quad x \in \mathbb{R}_{++}^n. \quad (QP_\varepsilon)$$

Question 1. Montrer que (QP) a une solution unique, avec un unique multiplicateur de Lagrange associé, qu'on notera respectivement \bar{x} et $\bar{\lambda}$. On écrira les conditions nécessaires d'optimalité.

Question 2. Enoncer le lagrangien du problème (QP). Montrer que $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ est point-selle de ce Lagrangien, et formuler le problème dual noté (QD). Le multiplicateur $\bar{\lambda}$ est-il solution de (QD) ? Les problèmes primal et dual ont-ils même valeur ?

Question 3. (i) Montrer que pour tout $\eta > 0$, $\varphi_\eta(s) := \frac{1}{2}s^2 - \eta \log s$ atteint son minimum sur \mathbb{R}_{++} . (ii) En déduire que $V_\varepsilon := \inf\{F_\varepsilon(x); x \in \mathbb{R}_{++}^n\}$ est fini.

Question 4. Montrer que F_ε est fortement convexe sur son domaine de définition, et que (QP_ε) a une solution unique notée x_ε .

Question 5. Si $x \in \mathbb{R}_{++}^n$, on note x^{-1} le vecteur de i ème composante $1/x_i$, pour $i = 1$ à n . On note $\lambda_\varepsilon := \varepsilon(x_\varepsilon)^{-1}$, où x_ε a été défini dans la question précédente. Montrer que $(x_\varepsilon, \lambda_\varepsilon)$ est borné, et vérifie

$$c + Ax_\varepsilon - \lambda_\varepsilon = 0. \quad (13)$$

Question 6. Montrer que $(x_\varepsilon, \lambda_\varepsilon)$ tend vers $(\bar{u}, \bar{\lambda})$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Partie II. Problème de l'obstacle avec conditions de Neumann Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n de frontière de classe C^∞ . On pose $V = H^1(\Omega)$, et on note par V_+ (resp. V_{++}) l'ensemble des fonctions positives (resp. strictement positives p.p.) de V . Soit $f \in L^2(\Omega)$. Pour $u \in V$, notons

$$F(u) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} u(x)^2 dx - \int_{\Omega} f(x)u(x) dx. \quad (14)$$

Considérons le problème

$$\min_u F(u); \quad u \in V_+. \quad (P)$$

Question 7. Montrer que (P) a une solution unique notée \bar{u} , caractérisée par la condition d'optimalité $\bar{u} \geq 0$ et

$$\int_{\Omega} \nabla \bar{u}(x) \cdot (\nabla v(x) - \nabla \bar{u}(x)) dx + \int_{\Omega} \bar{u}(x)(v(x) - \bar{u}(x)) dx \geq \int_{\Omega} f(x)(v(x) - \bar{u}(x)) dx, \quad (15)$$

pour tout $v \in V_+$.

Question 8. En déduire une estimation de $\|\bar{u}\|_V$ en fonction de $\|f\|_{L^2(\Omega)}$.

Question 9. Soit $u \in V_{++}$. Montrer que $\Phi(u) := -\int_{\Omega} \log(u(x)) dx$ est toujours bien définie (au sens de l'intégrale de Lebesgue), à valeur dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Question 10. Pour $u \in V_{++}$, on pose $F_\varepsilon(u) := F(u) + \varepsilon\Phi(u)$ et on définit le problème avec pénalisation logarithmique comme

$$\min_u F_\varepsilon(u); \quad u \in V_{++}. \quad (P_\varepsilon)$$

Montrer que l'infimum de ce problème est fini. On pourra s'inspirer de la première partie.

Question 11. Montrer que (P_ε) a une solution unique u_ε .

Question 12. On admet dans la suite que la fonction que $\lambda_\varepsilon(x) = \varepsilon/u_\varepsilon(x)$ est dans $L^\infty(\Omega)$. Montrer que u_ε est caractérisée par la relation

$$\int_{\Omega} \nabla u_\varepsilon(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\Omega} (u_\varepsilon(x) - \varepsilon/u_\varepsilon(x))v(x) dx = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx, \quad (16)$$

pour tout $v \in V$.

Question 13. On suppose que $u_\varepsilon \rightarrow \tilde{u}$ dans V quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Montrer que $\tilde{u} = \bar{u}$.

Corrigé du Problème 1 : équation des ondes

Partie I.

Réponse à la question 1.a. Si $u(x, t) = v(x)e^{i\omega t}$, alors on a

$$\Delta u(x, t) = \Delta v(x)e^{i\omega t}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\omega^2 v(x)e^{i\omega t}.$$

Si on reporte cela dans le système (1), on obtient $(\Delta v(x) + \omega^2 v(x)) e^{i\omega t} = 0$, donc

$$-\Delta v = \omega^2 v.$$

Par ailleurs, les conditions de bord vérifiées par u impliquent que

$$v = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega.$$

Réponse à la question 1.b. Pour obtenir la formulation variationnelle du problème ci-dessus, on multiplie l'équation par une fonction test w régulière et nulle au bord de Ω . On obtient donc

$$\int_{\Omega} -\Delta v w = \omega^2 \int_{\Omega} v w.$$

En intégrant par parties, on a $\int_{\Omega} -\Delta v w = \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla v - \int_{\partial\Omega} w \frac{\partial v}{\partial n}$. Le terme de bord est nul car w est nulle sur $\partial\Omega$. On obtient donc $\int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla w = \omega^2 \int_{\Omega} v w$. Ainsi, la formulation variationnelle du problème vérifié par v est donc

$$\forall w \in H_0^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla w = \omega^2 \int_{\Omega} v w.$$

Réponse à la question 1.c. On utilise l'inégalité de Poincaré :

$$\exists C > 0, \quad \forall w \in H_0^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} w^2 \leq C \int_{\Omega} |\nabla w|^2.$$

Ainsi, pour $w \in H_0^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned} a(w, w) &= \int_{\Omega} |\nabla w|^2 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla w|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla w|^2 \geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla w|^2 + \frac{1}{2C} \int_{\Omega} w^2 \\ &\geq \min\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2C}\right) \left(\int_{\Omega} |\nabla w|^2 + \int_{\Omega} w^2 \right) = \min\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2C}\right) \|w\|_X^2. \end{aligned}$$

Donc la forme bilinéaire a est bien coercive sur $X = H_0^1(\Omega)$.

Réponse à la question 1.d. En dimension 1, l'équation vérifiée par v devient $-v'' = \omega^2 v$. Cette équation différentielle linéaire admet un ensemble de solutions de la forme

$$v(x) = Ae^{i\omega x} + Be^{-i\omega x},$$

où A et B sont des constantes. Pour qu'une telle fonction soit nulle en 0, il est nécessaire que $A + B = 0$, donc $v(x) = 2Ai \sin(\omega x)$. Pour que v s'annule également en $x = 1$, on doit

avoir $\sin(\omega) = 0$, donc $\omega = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. On obtient donc un ensemble de solutions discret de la forme:

$$\omega_k = k\pi, \quad v_k(x) = \sin(k\pi x), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Notons que le cas $k = 0$ donne bien une solution, mais comme $v_0 = 0$, il ne s'agit pas d'un vecteur propre du Laplacien.

Réponse à la question 2. Ici aussi, on multiplie par une fonction test, notée $w(x)$, et on intègre par parties, en utilisant le fait que w est nulle sur le bord de Ω . On obtient alors

$$\forall w \in H_0^1(\Omega), \quad \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} u(x,t)w(x)dx + \int_{\Omega} \nabla u(x,t) \cdot \nabla w(x)dx = 0,$$

assortie des conditions initiales

$$u(x, t = 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, t = 0) = u_1(x).$$

Réponse à la question 3. On reproduit la preuve du théorème 8.3.4 du polycopié : on applique le théorème 8.3.1, avec $H = L^2(\Omega)$, $V = H_0^1(\Omega)$. Le problème ci-dessus admet donc une unique solution $u \in C^0([0, T], H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, T], L^2(\Omega))$, à partir du moment où $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$.

Réponse à la question 4.a. On intègre la première ligne de (1) contre $\frac{\partial u}{\partial t}$ sur Ω , ce qui donne

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)dx - \int_{\Omega} \Delta u(x,t) \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)dx = 0.$$

Le premier terme est la dérivée en temps de $\frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2(x,t)dx$. Par ailleurs, on applique la formule de Green au deuxième terme. Comme u est nulle sur $\partial\Omega$, le terme de bord est nul. On a donc

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2(x,t)dx \right) + \int_{\Omega} \nabla u(x,t) \cdot \nabla \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)dx = 0.$$

On identifie le deuxième comme la dérivée en temps de $\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2(x,t)dx$, d'où

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2(x,t)dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^2(x,t)dx \right] = 0.$$

On intègre cette égalité de 0 à t , on applique les conditions initiales, et on obtient le résultat.

Réponse à la question 4.b. On intègre la première ligne de (1) contre u sur Ω , et on applique la formule de Green :

$$\int_{\Omega} u(x,t) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^2(x,t)dx = 0.$$

Ici encore, le terme de bord est nul car $u = 0$ sur $\partial\Omega$. Ensuite, on intègre en temps de 0 à t_0 , et on intègre par parties (en temps) le premier terme :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u(x, t_0) \frac{\partial u}{\partial t}(x, t_0)dx - \int_{\Omega} u(x, 0) \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0)dx - \int_0^{t_0} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2(x,t)dxdt \\ + \int_0^{t_0} \int_{\Omega} |\nabla u|^2(x,t)dxdt = 0. \end{aligned}$$

En appliquant (2), on obtient le résultat.

Réponse à la question 4.c. Une première conséquence de (3) est que $\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2(x, t)dx$ d'une part, et $\int_{\Omega} |\nabla u|^2(x, t)dx$ d'autre part, sont des fonctions bornées de t . On applique l'inégalité de Poincaré, qui implique donc que $\int_{\Omega} u(x, t)^2 dx$ est bornée indépendamment de t . On applique ensuite l'inégalité de Cauchy-Schwarz, qui implique

$$\left| \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t)u(x, t)dx \right| \leq \left(\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2(x, t)dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} u(x, t)^2 dx \right)^{1/2},$$

qui est donc bornée indépendamment de t . D'autre part, $\forall t_0 \in [0, T[$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} \int_{\Omega} |\nabla u|^2(x, t)dxdt - \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2(x, t)dxdt \\ = \frac{1}{t_0} \int_{\Omega} u_0(x)u_1(x)dx - \frac{1}{t_0} \int_{\Omega} u(x, t_0) \frac{\partial u}{\partial t}(x, t_0)dx. \end{aligned}$$

Le membre de droite tend vers 0 quand t_0 tend vers l'infini, donc

$$\lim_{t_0 \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} \int_{\Omega} |\nabla u|^2(x, t)dxdt - \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2(x, t)dxdt \right) = 0. \quad (17)$$

Par ailleurs, on intègre (3) par rapport à t de 0 à t_0 , puis on divise par t_0 . On obtient alors

$$\frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} \int_{\Omega} |\nabla u|^2(x, t)dxdt + \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2(x, t)dxdt = \int_{\Omega} u_1^2(x)dx + \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2(x)dx,$$

d'où

$$\begin{aligned} \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} \int_{\Omega} |\nabla u|^2(x, t)dxdt + \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2(x, t)dxdt \right) \\ = \int_{\Omega} u_1^2(x)dx + \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2(x)dx. \quad (18) \end{aligned}$$

On fait ensuite la somme puis la différence (17) et (18), et on obtient le résultat.

Réponse à la question 5. On raisonne par densité : si u_0 et u_1 sont de classe C^∞ en espace, alors en appliquant la proposition 8.5.2, u est elle-même de classe C^∞ . Si maintenant on prend une suite de données initiales u_0^n et u_1^n de classe C^∞ qui convergent, respectivement, vers $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ et $u_1 \in L^2(\Omega)$, respectivement en norme $H^1(\Omega)$ et en norme $L^2(\Omega)$, on peut définir la solution u^n de (1)-(2) correspondante. On admet le résultat de stabilité suivant:

$$\|u - u^n\|_{C([0, T], H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, T], L^2(\Omega))} \leq C \left(\|u_0 - u_0^n\|_{H^1(\Omega)} + \|u_1 - u_1^n\|_{L^2(\Omega)} \right),$$

où $C > 0$ ne dépend pas de n . Comme u^n satisfait (3) pour tout $n \geq 0$, u satisfait (3) par passage à la limite. De même, (4) est également vraie. Enfin, on vérifie aisément que le raisonnement de la question 4.c reste valable si $u \in C([0, T], H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, T], L^2(\Omega))$.

Partie II.

Réponse à la question 6. Rappelons que la formulation variationnelle de (1)-(2) s'écrit

$$\forall w \in H_0^1(\Omega), \quad \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} u(x,t)w(x)dx + \int_{\Omega} \nabla u(x,t) \cdot \nabla w(x)dx = 0,$$

avec

$$u(x, t = 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, t = 0) = u_1(x).$$

L'approximation de Galerkin sur V_h s'écrit donc

$$\forall w_h \in V_h, \quad \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} u_h(x,t)w_h(x)dx + \int_{\Omega} \nabla u_h(x,t) \cdot \nabla w_h(x)dx = 0,$$

avec

$$u_h(x, t = 0) = u_{h,0}(x), \quad \frac{\partial u_h}{\partial t}(x, t = 0) = u_{h,1}(x).$$

En utilisant la décomposition de u_h sur la base $(\phi_i)_{1 \leq i \leq N_h}$, et en utilisant $w_h = \phi_i$ comme fonction test, on obtient

$$\forall 1 \leq i \leq N_h, \quad \sum_{j=1}^{N_h} \frac{d^2 U_j}{dt^2} \int_{\Omega} \phi_j(x)\phi_i(x)dx + \sum_{j=1}^{N_h} U_j(t) \int_{\Omega} \nabla \phi_i(x) \cdot \nabla \phi_j(x)dx = 0.$$

On obtient donc le résultat voulu, avec des matrices M_h et K_h définies par

$$(M_h)_{ij} = \int_{\Omega} \phi_i \phi_j, \quad (K_h)_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j.$$

D'autre part, la condition initiale s'écrit bien

$$\forall 1 \leq j \leq N_h, \quad U_j(0) = U_j^{h,0} \text{ et } \frac{dU_j}{dt}(0) = U_j^{h,1}.$$

Réponse à la question 7. Il est clair que M_h et K_h sont symétriques, d'après la question précédente. De plus, pour tout vecteur $V \in \mathbb{R}^{N_h}$, on a, en notant $v_h = \sum_{j=1}^{N_h} V_j \phi_j$,

$$(K_h V) \cdot V = \sum_{i=1}^{N_h} \sum_{j=1}^{N_h} V_i \int_{\Omega} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j V_j = \int_{\Omega} \left| \sum_{i=1}^{N_h} V_i \nabla \phi_i \right|^2 = \int_{\Omega} |\nabla v_h|^2 \geq 0.$$

Donc K_h est positive. De plus, si le $(K_h V) \cdot V = 0$, on a alors $\nabla v_h = 0$, donc v_h est une constante. Comme elle est nulle au bord de Ω , $v_h = 0$, ce qui équivaut à $V = 0$. Ainsi, K_h est définie positive.

De même, on a

$$(M_h V) \cdot V = \sum_{i=1}^{N_h} \sum_{j=1}^{N_h} V_i \int_{\Omega} \phi_i \phi_j V_j = \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^{N_h} V_i \phi_i \right)^2 = \int_{\Omega} v_h^2 \geq 0.$$

Et là encore, si le membre de gauche est nul, c'est que v_h est nulle, donc $V = 0$. Donc M_h est définie positive.

Réponse à la question 8. On reproduit la preuve du cas continu : on fait le produit scalaire de la première ligne de (5) avec $\frac{dU}{dt}$, ce qui donne

$$\left(M_h \frac{d^2U}{dt^2}\right) \cdot \frac{dU}{dt} + (K_h U) \cdot \frac{dU}{dt} = 0.$$

Comme M_h et K_h sont symétriques, on a

$$\frac{d}{dt} \left[\left(M_h \frac{dU}{dt}\right) \cdot \frac{dU}{dt} \right] = 2 \left(M_h \frac{d^2U}{dt^2}\right) \cdot \frac{dU}{dt}, \text{ et } \frac{d}{dt} [(K_h U) \cdot U] = 2 (K_h U) \cdot \frac{dU}{dt}.$$

Ainsi,

$$\frac{d}{dt} \left[\left(M_h \frac{dU}{dt}\right) \cdot \frac{dU}{dt} + (K_h U) \cdot U \right] = 0.$$

On intègre de 0 à t , ce qui donne

$$\forall t \in [0, T[, \quad \left(M_h \frac{dU}{dt}\right) \cdot \frac{dU}{dt} + (K_h U) \cdot U = \left(M_h U^{h,1}\right) \cdot U^{h,1} + \left(K_h U^{h,0}\right) \cdot U^{h,0}.$$

Réponse à la question 9.a. En notant $U(t)$ la solution exacte de (5), et en supposant qu'elle est de classe C^4 , on a, en utilisant un développement de Taylor :

$$U((n+1)\Delta t) = U(n\Delta t) + \Delta t \frac{dU}{dt}(n\Delta t) + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{d^2U}{dt^2} + \frac{(\Delta t)^3}{6} \frac{d^3U}{dt^3} + O((\Delta t)^4),$$

et

$$U((n-1)\Delta t) = U(n\Delta t) - \Delta t \frac{dU}{dt}(n\Delta t) + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{d^2U}{dt^2} - \frac{(\Delta t)^3}{6} \frac{d^3U}{dt^3} + O((\Delta t)^4).$$

D'où l'on déduit

$$\frac{U((n+1)\Delta t) - 2U(n\Delta t) + U((n-1)\Delta t)}{\Delta t^2} = \frac{d^2U}{dt^2} + O((\Delta t)^2).$$

Ainsi, l'erreur de troncature du schéma tend bien vers 0 à la vitesse au moins $(\Delta t)^2$.

Réponse à la question 9.b. D'après la question 7, les matrices K_h et M_h sont symétriques définies positives. Donc, par application du théorème spectral, il existe une base V^1, \dots, V^{N_h} de \mathbb{R}^{N_h} qui est orthonormée pour M_h et orthogonale pour K_h . On a alors

$$K_h V^i = \lambda_i M_h V^i, \quad \lambda_i = \frac{K_h V^i \cdot V^i}{M_h V^i \cdot V^i} > 0,$$

car K_h et M_h sont symétriques définies positives.

Réponse à la question 9.c. On décompose donc U^n sur cette base : $U^n = \sum_{i=1}^{N_h} \alpha_i^n V^i$. On a alors

$$\frac{\alpha_i^{n+1} - 2\alpha_i^n + \alpha_i^{n-1}}{\Delta t^2} + \lambda_i \alpha_i^n = 0,$$

pour tout $1 \leq i \leq N_h$. Cette relation à trois niveaux s'écrit également

$$\begin{pmatrix} \alpha_i^{n+1} \\ \alpha_i^n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 - \Delta t^2 \lambda_i & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A_i} \begin{pmatrix} \alpha_i^n \\ \alpha_i^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de A_i sont les racines du polynôme caractéristique

$$X(X - 2 + \Delta t^2 \lambda_i) + 1 = X^2 - (2 - \Delta t^2 \lambda_i)X + 1.$$

Le discriminant vaut $(2 - \Delta t^2 \lambda_i)^2 - 4 = \Delta t^2 \lambda_i (\Delta t^2 \lambda_i - 4)$. Si $\Delta t^2 \max \lambda_i < 4$, le discriminant est strictement négatif, et on a donc deux valeurs propres complexes conjuguées, que l'on note μ_i et $\bar{\mu}_i$. Comme $|\mu_i|^2 = \mu_i \bar{\mu}_i = \det(A_i) = 1$, on a nécessairement $\mu_i \neq \bar{\mu}_i$ (car sinon on aurait $\mu_i = \pm 1$, ce qui est exclu car la trace de A_i ne peut être égale ni à 2 ni à -2 .) Ainsi, A_i est diagonalisable dans \mathbb{C} , donc il existe une matrice de passage P telle que

$$A_i = P \begin{pmatrix} \mu_i & 0 \\ 0 & \bar{\mu}_i \end{pmatrix} P^{-1}, \text{ donc } A_i^n = P \begin{pmatrix} \mu_i^n & 0 \\ 0 & \bar{\mu}_i^n \end{pmatrix} P^{-1},$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ceci prouve que la suite

$$\begin{pmatrix} \alpha_i^{n+1} \\ \alpha_i^n \end{pmatrix} = A_i^n \begin{pmatrix} \alpha_i^1 \\ \alpha_i^0 \end{pmatrix},$$

est bornée, donc que le schéma est stable au sens de von Neumann.

Réponse à la question 9.d. Pour stabiliser le schéma, on peut l'impliciter : le schéma s'écrit alors

$$\begin{cases} M_h \frac{U^{n+1} - 2U^n + U^{n-1}}{\Delta t^2} + K_h U^{n+1} = 0, \\ U^0 = U^{h,0}, \quad \frac{U^1 - U^0}{\Delta t} = U^{h,1}, \end{cases}$$

que l'on peut analyser exactement comme le schéma explicite ci-dessus. On écrit $U^n = \sum_{i=1}^{N_h} \beta_i^n V^i$, et on a alors

$$\frac{\beta_i^{n+1} - 2\beta_i^n + \beta_i^{n-1}}{\Delta t^2} + \lambda_i \beta_i^{n+1} = 0,$$

pour tout $1 \leq i \leq N_h$, c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} \beta_i^{n+1} \\ \beta_i^n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{2}{1+\lambda_i \Delta t^2} & -\frac{1}{1+\lambda_i \Delta t^2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{B_i} \begin{pmatrix} \beta_i^n \\ \beta_i^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Cette fois, le polynôme caractéristique de B_i s'écrit

$$\chi_i(X) = X^2 - \frac{2}{1 + \lambda_i \Delta t^2} X + \frac{1}{1 + \lambda_i \Delta t^2},$$

dont le discriminant vaut $\frac{4}{(1+\lambda_i \Delta t^2)^2} - \frac{4}{1+\lambda_i \Delta t^2} = \frac{4}{(1+\lambda_i \Delta t^2)^2} (-\lambda_i \Delta t^2) < 0$. On a donc une fois de plus deux valeurs propres complexes conjuguées, dont le module au carré vaut $|\mu_i|^2 = \frac{1}{1+\lambda_i \Delta t^2} < 1$. Donc ce schéma satisfait la condition de stabilité de von Neumann, indépendamment de Δt .

Réponse à la question 10. On multiplie la première ligne de (6) par $U^{n+1} - U^{n-1}$. On obtient alors

$$\frac{1}{\Delta t^2} M_h (U^{n+1} - 2U^n + U^{n-1}) \cdot (U^{n+1} - U^{n-1}) + K_h U^n \cdot (U^{n+1} - U^{n-1}) = 0.$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
M_h (U^{n+1} - 2U^n + U^{n-1}) \cdot (U^{n+1} - U^{n-1}) &= M_h (U^{n+1} - U^n) \cdot (U^{n+1} - U^{n-1}) \\
&\quad - M_h (U^n - U^{n-1}) \cdot (U^{n+1} - U^{n-1}) \\
&= M_h (U^{n+1} - U^n) \cdot (U^{n+1} - U^n) \\
&\quad + M_h (U^{n+1} - U^n) \cdot (U^n - U^{n-1}) \\
&\quad - M_h (U^n - U^{n-1}) \cdot (U^{n+1} - U^n) \\
&\quad - M_h (U^n - U^{n-1}) \cdot (U^n - U^{n-1})
\end{aligned}$$

Comme la matrice M_h est symétrique, ceci s'écrit

$$\begin{aligned}
M_h (U^{n+1} - 2U^n + U^{n-1}) \cdot (U^{n+1} - U^{n-1}) &= M_h (U^{n+1} - U^n) \cdot (U^{n+1} - U^n) \\
&\quad - M_h (U^n - U^{n-1}) \cdot (U^n - U^{n-1})
\end{aligned}$$

De plus,

$$K_h U^n \cdot (U^{n+1} - U^{n-1}) = K_h U^n \cdot U^{n+1} - K_h U^n \cdot U^{n-1}.$$

Ces deux dernières égalités, insérées dans la première ci-dessus, donnent donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Delta t^2} M_h (U^{n+1} - U^n) \cdot (U^{n+1} - U^n) + K_h U^n \cdot U^{n+1} \\
= \frac{1}{\Delta t^2} M_h (U^n - U^{n-1}) \cdot (U^n - U^{n-1}) + K_h U^n \cdot U^{n-1}.
\end{aligned}$$

Cette quantité est donc indépendante de n , et on obtient donc le résultat.

Réponse à la question 11. L'égalité (7) est une version discrète de la conservation d'énergie (3).

Partie III.

Réponse à la question 12. On utilise la même méthode que dans la question 4.a, en intégrant l'équation contre $\frac{\partial u}{\partial t}$. On a alors, après avoir intégré par parties, (ici encore, le terme de bord est nul car $u|_{\partial\Omega} = 0$, donc, par régularité de u , $\frac{\partial u}{\partial t}|_{\partial\Omega} = 0$)

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dx + \int_{\Omega} G'(\nabla u(x, t)) \cdot \nabla \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dx = 0.$$

Ceci se réécrit

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 (x, t) dx + \int_{\Omega} G(\nabla u(x, t)) dx \right] = 0.$$

On trouve donc bien l'analogie de (3), à savoir

$$\forall t \in [0, T[, \quad \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 (x, t) dx + \int_{\Omega} G(\nabla u(x, t)) dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_1^2(x) dx + \int_{\Omega} G(\nabla u_0(x)) dx.$$

Rappelons que le cas linéaire correspond à $F(y) = y$, donc à $G(y) = \frac{1}{2}|y|^2$. Dans ce cas, on retrouve bien exactement (3).

Réponse à la question 13. On utilise que $G(y) \geq \alpha|y|^2$, ce qui donne bien

$$\forall t \in [0, T[, \quad \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 (x, t) dx + \alpha \int_{\Omega} |\nabla u|^2(x, t) dx \leq C(u_0, u_1),$$

avec

$$C(u_0, u_1) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_1^2(x) dx + \int_{\Omega} G(\nabla u_0(x)) dx.$$

Réponse à la question 14. Supposons que u est une solution C^2 de (1)-(2). On multiplie alors la première ligne de (1) par φ et on intègre sur $\Omega \times [0, T[$. Le premier terme donne

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \varphi(x, t) dx dt &= - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) \varphi(x, 0) dx - \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) dx dt \\ &= - \int_{\Omega} u_1(x) \varphi(x, 0) dx + \int_{\Omega} u_0(x) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, 0) dx \\ &\quad + \int_0^T \int_{\Omega} u(x, t) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(x, t) dx. \end{aligned}$$

Quant au deuxième terme, il vaut, puisque $\varphi \in \mathcal{D}([0, T[\times \Omega)$,

$$\int_0^T \int_{\Omega} - \frac{\partial}{\partial x} \left(F \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) (x, t) \varphi(x, t) dx dt = \int_0^T \int_{\Omega} F \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) dx dt.$$

En sommant ces deux inégalités, on obtient (9).

Réponse à la question 15.a. On a $F(y) = G'(y)$. D'après l'inégalité $\alpha y^2 \leq G(y) \leq \beta y^2$, il est clair que $G(0) = 0$. Comme F est régulière, G l'est également et donc

$$F(0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{G(y)}{y} = 0,$$

toujours en appliquant les inégalités vérifiées par G .

Réponse à la question 15.b. Pour $\varphi \in \mathcal{D}$, comme $t < T < 1/c$, on a

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 u(x, t) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) dx &= \int_{-1}^{-ct} (-x - 1) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) dx + \int_{-ct}^{ct} (ct - 1) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) dx \\ &\quad + \int_{ct}^1 (x - 1) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) dx \\ &= (ct - 1) \varphi(-ct) + \int_{-1}^{-ct} \varphi(x) dx \\ &\quad + (ct - 1) (\varphi(ct) - \varphi(-ct)) \\ &\quad - (ct - 1) \varphi(ct) - \int_{ct}^1 \varphi(x) dx, \end{aligned}$$

où on a intégré par parties chaque terme séparément. Ainsi,

$$\int_{-1}^1 u(x, t) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) dx = \int_{-1}^{-ct} \varphi(x) dx - \int_{ct}^1 \varphi(x) dx. \quad (19)$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz implique alors que

$$\left| \int_{-1}^1 u(x, t) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) dx \right| \leq \int_{-1}^1 |\varphi(x)| dx \leq \sqrt{2} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)},$$

ce qui prouve que $x \mapsto u(x, t) \in H^1(\Omega)$. Par ailleurs, u est de class C^∞ au voisinage de -1 et 1 , et vérifie $u(-1, t) = u(1, t) = 0$, ce qui prouve que $x \mapsto u(x, t) \in H_0^1(\Omega)$. Enfin, il est clair d'après (19) que $x \mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$ est la fonction constante par morceaux égale à 1 sur $] -1, -ct]$, à 0 sur $] -ct, ct[$, et à 1 sur $[ct, 1[$. Cette fonction s'écrit aussi

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x - ct) + \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x + ct),$$

où la fonction $\operatorname{sgn}(a)$ vaut 1 si $a > 0$ et -1 si $a < 0$.

Réponse à la question 15.c. On étudie les deux termes de membre de gauche de (9) séparément. Pour le premier, on constate que u est paire en x , donc le terme est nul dès que φ est impaire en x . On se restreint donc au cas où φ est paire en x . On a alors

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} u \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} dx dt &= \int_{-1}^1 \int_0^T u \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} dt dx = 2 \int_0^1 \int_0^T u \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} dt dx \\ &= 2 \int_0^1 \int_0^{\frac{x}{c}} (x-1) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} dt dx + 2 \int_0^1 \int_{\frac{x}{c}}^T (ct-1) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} dt dx. \end{aligned}$$

On intègre par parties en temps chaque terme, et on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} u \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} dx dt &= 2 \int_0^1 (x-1) \frac{\partial \varphi}{\partial t} \left(x, \frac{x}{c} \right) dx - 2 \int_0^1 (x-1) \frac{\partial \varphi}{\partial t} (x, 0) dx \\ &\quad - 2 \int_0^1 (x-1) \frac{\partial \varphi}{\partial t} \left(x, \frac{x}{c} \right) dx - 2c \int_0^1 \int_{\frac{x}{c}}^T \frac{\partial \varphi}{\partial t} (x, t) dt dx \\ &= -2 \int_0^1 (x-1) \frac{\partial \varphi}{\partial t} (x, 0) dx + 2c \int_0^1 \varphi \left(x, \frac{x}{c} \right) dx \\ &= - \int_{-1}^1 (|x|-1) \frac{\partial \varphi}{\partial t} (x, 0) dx + c \int_0^1 \varphi \left(x, \frac{x}{c} \right) dx \\ &\quad + c \int_{-1}^0 \varphi \left(x, -\frac{x}{c} \right) dx. \end{aligned} \tag{20}$$

Pour le deuxième terme, on a, d'après la question précédente, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x-ct) + \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x+ct)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} F \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dt &= F(-1) \int_0^T \int_{-1}^{-ct} \frac{\partial \varphi}{\partial x} (x, t) dx dt + F(1) \int_0^T \int_{ct}^1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} (x, t) dx dt \\ &= -c^2 \int_0^T \int_{-1}^{-ct} \frac{\partial \varphi}{\partial x} (x, t) dx dt + c^2 \int_0^T \int_{ct}^1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} (x, t) dx dt \\ &= -c^2 \int_0^T \varphi(-ct, t) dt - c^2 \int_0^T \varphi(ct, t) dt \\ &= -c \int_0^{cT} \varphi \left(-x, \frac{x}{c} \right) dx - c \int_0^{cT} \varphi \left(x, \frac{x}{c} \right) dx \\ &= -c \int_0^1 \varphi \left(-x, \frac{x}{c} \right) dx - c \int_0^1 \varphi \left(x, \frac{x}{c} \right) dx, \end{aligned} \tag{21}$$

car $\varphi(x, t)$ est nulle pour $t \geq T$. On somme (20) et (21), et on obtient

$$\int_0^T \int_{\Omega} u \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} F \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dt = - \int_0^1 (|x| - 1) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, 0) dx.$$

On obtient bien (9), avec $u_0(x) = |x| - 1$ et $u_1 = 0$.

Réponse à la question 15.d. Ici, il faut d'abord vérifier que $t \mapsto u(x, t)$ est bien dans $H^1(]0, T[)$ pour tout $x \in \Omega$. Pour cela, on applique exactement le raisonnement de la question 15.b, qui implique effectivement que cette fonction est H^1 et que $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{c}{2} \operatorname{sgn}(ct - x) + \frac{c}{2} \operatorname{sgn}(x + ct)$. On a donc

$$\int_{-1}^1 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2(x, t) dx = \int_{-1}^{-ct} (-c)^2 dt + \int_{ct}^1 c^2 dt = 2c^2(1 - ct).$$

Par ailleurs, d'après la question 15.b, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x - ct) + \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x + ct)$, donc

$$\int_{-1}^1 G \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right) dx = \int_{-1}^{-ct} G(-1) dx + \int_{ct}^1 G(1) dx = [G(1) + G(-1)](1 - ct).$$

Ainsi,

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2(x, t) dx + \int_{-1}^1 G \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right) dx = (2c^2 + G(1) + G(-1))(1 - ct).$$

Il est donc clair que cette fonction de t n'est pas une constante. En revanche, comme G est positive, c'est une fonction strictement décroissante de t .

Pour démontrer l'égalité de conservation d'énergie de la question (12), on a supposé que la solution u était régulière. Ce n'est pas le cas de $u(x, t) = |x - ct|/2 + |x + ct|/2 - 1$, qui n'est pas de classe C^1 . Ceci démontre donc que, pour des solutions non régulières, non seulement la preuve de la question 12 n'est pas valable, mais son résultat devient faux.

Corrigé du problème 2 : Pénalisation logarithmique

Partie I. Optimisation quadratique convexe, dimension finie

Réponse à la question 1. On sait qu'un critère fortement convexe a un unique minimum sur un ensemble convexe fermé. Les contraintes, écrites sous le format standard $-x \leq 0$, sont en nombre fini et de gradients linéairement indépendants. Il existe donc un multiplicateur unique, et comme $F'(x) = c + Ax$ (on identifie ici \mathbb{R}^n et son dual), le système d'optimalité a pour expression

$$c + A\bar{x} - \bar{\lambda} = 0; \quad \bar{\lambda} \geq 0; \quad \bar{\lambda} \cdot x = 0. \quad (22)$$

Réponse à la question 2. Le lagrangien est $L(x, \lambda) := F(x) - \lambda \cdot x$. D'après le théorème de Kuhn et Tucker 10.3.4, la paire $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ est point-selle du lagrangien, et en particulier, $\bar{\lambda}$ est solution du problème dual. Les problèmes primal et dual ont donc même valeur en raison du théorème de dualité 10.3.8.

Pour λ fixé, le minimum du lagrangien est atteint en l'unique point x^λ tel que

$$0 = D_x L(x^\lambda, \lambda) = c + Ax^\lambda - \lambda \quad \Rightarrow \quad x^\lambda = A^{-1}(\lambda - c). \quad (23)$$

Le critère dual vaut donc, utilisant $L(x, \lambda) = (c + Ax - \lambda) \cdot x - \frac{1}{2}Ax \cdot x$:

$$d(\lambda) = L(x^\lambda, \lambda) = -\frac{1}{2}A^{-1}(\lambda - c) \cdot (\lambda - c). \quad (24)$$

Le problème dual est donc

$$\sup_{\lambda} -\frac{1}{2}A^{-1}(\lambda - c) \cdot (\lambda - c); \quad \lambda \geq 0. \quad (QD)$$

Réponse à la question 3. (i) La fonction φ_η est strictement convexe et tend vers $+\infty$ en 0_+ et aussi en $+\infty$ (majorer $\log s$ par $s - 1$). Elle atteint donc sur \mathbb{R}_{++} son minimum en l'unique point s_η annulant sa dérivée, soit $s_\eta - \eta/s_\eta = 0$, de là $s_\eta = \sqrt{\eta}$. La valeur du minimum est $\frac{1}{2}(\eta^2 - \eta \log \eta)$.

(ii) Posons $G(x) = F(x) - \frac{1}{2}\alpha|x|^2$. On peut écrire

$$F_\varepsilon(x) = G(x) + \frac{1}{2}\alpha \sum_{i=1}^n \phi_\eta(x_i) \quad (25)$$

avec $\eta = 2\varepsilon/\alpha$, ce qui exprime F_ε comme une somme de $n + 1$ fonctions d'infimum borné sur \mathbb{R}_{++} ; donc F_ε a un infimum borné.

Réponse à la question 4. La somme d'une fonction convexe et d'une fonction fortement convexe est fortement convexe. Utilisant la question précédente, on vérifie comme dans la démonstration du théorème 9.2.6 qu'une suite minimisante x^k est convergente vers un certain point x_ε ; la suite minimisante étant dans \mathbb{R}_{++}^n , on a $x_\varepsilon \in \mathbb{R}_+^n$. Comme (25) exprime F_ε comme une somme de $n + 1$ fonctions d'infimum borné sur \mathbb{R}_{++} , chacune de ces fonctions a une limite finie le long de la suite minimisante, ce qui assure que $x_\varepsilon \in \mathbb{R}_{++}^n$. Enfin comme F_ε est continue sur \mathbb{R}_{++}^n , on en déduit que x_ε réalise le minimum de F_ε sur \mathbb{R}_{++}^n .

Réponse à la question 5. La relation (13) traduit la stationarité de F_ε en x_ε , et comme $\lambda_\varepsilon \cdot x_\varepsilon = n\varepsilon$, elle implique

$$\alpha|x_\varepsilon|^2 \leq Ax_\varepsilon \cdot x_\varepsilon = -c \cdot x_\varepsilon + n\varepsilon \leq \frac{1}{2}\alpha^{-1}|c|^2 + \frac{1}{2}\alpha|x_\varepsilon|^2 + n\varepsilon. \quad (26)$$

Donc x_ε est borné, tout comme $\lambda_\varepsilon = -c - Ax_\varepsilon$.

Réponse à la question 6. Soit $(\tilde{x}, \tilde{\lambda})$ un point d'adhérence de la famille bornée $(x_\varepsilon, \lambda_\varepsilon)$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Passant à la limite dans (13) et les relations $\lambda_\varepsilon \geq 0$ et $\lambda_\varepsilon \cdot x_\varepsilon = n\varepsilon$, on voit que $(\tilde{x}, \tilde{\lambda})$ vérifie le système d'optimalité (22), qui a une solution unique, d'où la conclusion.

Partie II. Problème de l'obstacle avec conditions de Neumann

Réponse à la question 7. Application directe de la condition d'optimalité du premier ordre pour la minimisation d'une fonction différentiable sur un convexe.

Réponse à la question 8. Choisisant $v = 0$ dans (15), il vient

$$\int_{\Omega} |\nabla \bar{u}(x)|^2 dx + \int_{\Omega} \bar{u}(x)^2 dx \leq \int_{\Omega} f(x) \bar{u}(x) dx \quad (27)$$

d'où

Réponse à la question 9. Comme $\log s \leq s - 1$ pour tout $s > 0$, et $u \in L^2(\Omega)$, la fonction $x \mapsto -\log(u(x))$ est minorée par une fonction intégrable, d'où le résultat.

Réponse à la question 10. On pose $G(u) := F(u) - \frac{1}{4}\|u\|_{L^2(\Omega)}^2$ et

$$\Psi_\varepsilon(u) = \frac{1}{4}\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 - \varepsilon \int_\Omega \log(u(x)) dx = \int_\Omega \left(\frac{1}{4}u(x)^2 - \varepsilon \log(u(x)) \right) dx = \frac{1}{2} \int_\Omega \varphi_{2\varepsilon}(u(x)) dx. \quad (28)$$

Comme l'intégrande de Ψ_ε a un infimum fini d'après la première partie, $F_\varepsilon(u) = G(u) + \Psi_\varepsilon(u)$ est la somme de deux fonctions d'infimum fini, d'où le résultat.

Réponse à la question 11. Par les même argument sur les suites minimisantes d'un critère fortement convexe que dans la première partie, on obtient qu'une suite minimisante u^k converge dans V , et donc a une limite u_ε dans l'ensemble fermé V_+ . Montrons que $u_\varepsilon \in V_{++}$. Si au contraire u_ε s'annule sur un ensemble mesurable $\omega \subset \Omega$, extrayant si nécessaire une sous suite, on peut supposer que $u^k \rightarrow u_\varepsilon$ p.p., et donc pour tout $\theta > 0$, on a $u^k(x) \leq \theta$ p.p. sur ω , et donc

$$\Psi_\varepsilon(u^k) \geq -\varepsilon \text{mes}(\omega) \log(\theta) + \int_{\Omega \setminus \omega} \varphi_{2\varepsilon}(u(x)) dx. \quad (29)$$

Comme $\varphi_{2\varepsilon}$ a un minorant fini, faisant $\theta \downarrow 0$, on en déduit donc que $\Psi_\varepsilon(u^k) \rightarrow +\infty$, et comme G a un infimum fini, que $F_\varepsilon(u^k) = G(u) + \Psi_\varepsilon(u^k) \rightarrow +\infty$, ce qui contredit la notion de suite minimisante.

Réponse à la question 12. Comme $|u_\varepsilon(x)| \geq \varepsilon/\|\lambda_\varepsilon\|_\infty$ p.p., si $v \in L^\infty(\Omega)$, $u_\varepsilon + \rho v \in V_{++}$ pour $|\rho|$ assez petit, donc $\lim_{\rho \rightarrow 0} (F_\varepsilon(u_\varepsilon + \rho v) - F_\varepsilon(u_\varepsilon))/\rho = 0$ si la limite existe. Or, par convergence dominée

$$\frac{\Phi(u_\varepsilon + \rho v) - \Phi(u_\varepsilon)}{\rho} \rightarrow - \int_\Omega v(x)/u_\varepsilon(x) dx \quad (30)$$

et F est Fréchet différentiable : on en déduit facilement (16), quand $v \in L^\infty(\Omega)$.

Or $L^\infty(\Omega) \cap V$ est une partie dense de V (on sait même que l'ensemble des fonctions C^∞ sur $\bar{\Omega}$ est dense dans V). Soient $v \in V$ et v_k une suite de $L^\infty(\Omega) \cap V$ telle que $v_k \rightarrow v$ dans V . On conclut en passant à la limite dans (16) avec $v = v_k$.

Réponse à la question 13. Notons d'abord que $\tilde{u} \in V_+$ (la limite dans $L^2(\Omega)$ d'une suite de fonctions positives est positive). Soit ensuite $v \in V_+$. Prenons $v - u_\varepsilon$ comme fonction test dans (16). Utilisant

$$- \int_\Omega \frac{v(x) - u_\varepsilon(x)}{u_\varepsilon(x)} dx \leq \text{mes}(\Omega), \quad (31)$$

il vient

$$\begin{aligned} & \int_\Omega \nabla u_\varepsilon(x) \cdot (\nabla v(x) - \nabla u_\varepsilon(x)) dx + \int_\Omega u_\varepsilon(x)(v(x) - u_\varepsilon(x)) dx + \varepsilon \text{mes}(\Omega) \\ & \geq \int_\Omega f(x)(v(x) - u_\varepsilon(x)) dx. \end{aligned} \quad (32)$$

Passant à la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$, on obtient que \tilde{u} satisfait la condition d'optimalité (15). D'après la question 7, on a donc $\tilde{u} = \bar{u}$.