Ecole Polytechnique, Promotion 2007
Analyse numérique et optimisation (MAP 431)
Contrôle Hors Classement du mardi 7 avril 2009
Sujet proposé par G. Allaire

1 Différences finies (10 points)

Soit une une vitesse constante et positive $a > 0$. On cherche la solution $u(t,x)$ de l'équation d'advection linéaire dans $(0,1)$ avec une condition aux limites de flux entrant,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + a\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 & \text{pour } (x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}^+_*, \\ u(t,0) = f(t) & \text{pour } t \in \mathbb{R}^+_*, \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{pour } x \in (0,1), \end{cases} \tag{1}$$

où $f(t)$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, nulle pour $t \le 0$, et $u_0(x)$ est une fonction dérivable sur $(-\infty, 1)$, nulle pour $x \le 0$. Pour $\Delta t > 0$ et $\Delta x = 1/N > 0$ (avec N un entier positif), on définit les noeuds d'un maillage régulier

$$(t_n, x_j) = (n\Delta t, j\Delta x) \text{ pour } n \ge 0, j \in \{0, 1, ..., N\},$$

ainsi que les points "milieux"

$$(t_{n+1/2}, x_{j+1/2}) = (n+1/2)\Delta t, (j+1/2)\Delta x) \text{ pour } n \ge 0, j \in \{0, 1, ..., N\}.$$

On note u_j^n, respectivement $u_{j+1/2}^{n+1/2}$, une approximation discrète au point (t_n, x_j), respectivement $(t_{n+1/2}, x_{j+1/2})$, de la solution exacte $u(t,x)$. On considère le schéma de Carlson

$$\begin{cases} \dfrac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a\dfrac{u_{j+1/2}^{n+1/2} - u_{j-1/2}^{n+1/2}}{\Delta x} = 0, \\ u_j^{n+1} + u_j^n = u_{j+1/2}^{n+1/2} + u_{j-1/2}^{n+1/2}. \end{cases} \tag{2}$$

avec la donnée initiale $u_j^0 = u_0(x_j)$ et la condition aux limites $u_{1/2}^{n+1/2} = f(t_{n+1/2})$.

1. Montrer que la solution de (1) est

$$u(t,x) = u_0(x - at) + f(t - x/a) \quad \text{pour } (x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}^+_* .$$

2. En éliminant u_j^{n+1} dans la première relation de (2) grâce à la deuxième, montrer qu'on peut calculer explicitement les valeurs $u_{j+1/2}^{n+1/2}$ en fonction des valeurs précédentes u_j^n et de $f(t_{n+1/2})$ quitte à procéder dans un ordre, en fonction de j, que l'on précisera.

3. Montrer que le schéma de Carlson est consistant et (au moins) d'ordre 2. Indication : on calculera l'erreur de troncature de chacune des deux relations dans (2) en faisant un développement de Taylor autour du point $(t_{n+1/2}, x_j)$.

4. Montrer que le schéma de Carlson est inconditionnellement stable au sens où

$$\sum_{j=1}^{N} \Delta x |u_j^{n+1}|^2 \leq \sum_{j=1}^{N} \Delta x |u_j^0|^2 + \sum_{m=0}^{n} a \Delta t |f(t_{m+1/2})|^2.$$

Indication : on multipliera la première relation de (2) par $(u_j^{n+1} + u_j^n)$ et on utilisera la deuxième relation pour simplifier. Quel est le principal avantage de ce schéma par rapport à ceux vus en cours ?

2 Formulation variationnelle (10 points)

Dans un ouvert borné régulier Ω de $\mathbb{R}^N$ on s'intéresse à l'équation de la chaleur

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{pour } x \in \Omega. \end{cases} \tag{3}$$

où $u_0(x)$ est une donnée initiale appartenant à $L^2(\Omega)$. On propose une approche de **semi-discrétisation en temps**. Autrement dit, on discrétise la variable de temps mais pas celle d'espace. Soit $\Delta t > 0$ un pas de temps et la suite des temps discrets $t_n = n\Delta t$ pour $n \in \mathbb{N}$. On note $u_n(x)$ une approximation de la solution exacte $u(t_n, x)$ pour $n \geq 1$. On considère le schéma d'Euler implicite, pour $n \geq 1$,

$$\begin{cases} \dfrac{u_n - u_{n-1}}{\Delta t} - \Delta u_n = 0 & \text{dans } \Omega \\ u_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4}$$

Il faut tout d'abord montrer que l'on peut obtenir u_n à partir de u_{n-1} grâce à (4).

1. Donner la formulation variationnelle de (4). Démontrer l'existence et l'unicité de la solution u_n de cette formulation variationnelle. La méthode de démonstration serait-elle la même si on remplaçait la condition aux limites de Dirichlet par celle de Neumann (homogène) ?
2. En supposant que la solution de cette formulation variationnelle appartienne à $H^2(\Omega)$, en quel sens est-elle aussi une solution de (4) ?
3. Montrer que ce schéma d'Euler implicite est stable au sens où

$$\|u_n\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u_0\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

4. Montrer plus précisément que u_n vérifie, pour $n \geq 1$,

$$\frac{1}{2} \int_\Omega |u_n|^2 dx + \Delta t \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_\Omega |u_{n-1}|^2 dx \,. \tag{5}$$

On suppose que le schéma converge, c'est-à-dire qu'uniformément sur tout compact en temps, $u_n(x)$ converge vers $u(t,x)$ dans $H^1(\Omega)$ lorsque Δt tend vers 0 et t_n tend vers t. Déduire de (5) l'inégalité suivante pour la solution $u(t,x)$ de (3)

$$\frac{1}{2} \int_\Omega |u(t,x)|^2 dx + \int_0^t \int_\Omega |\nabla u(s,x)|^2 dx\, ds \leq \frac{1}{2} \int_\Omega |u_0(x)|^2 dx \,.$$

5. En vous inspirant du schéma d'Euler implicite (4), écrire le schéma d'Euler explicite pour (3). Montrer que ce schéma est instable au sens où on peut exhiber une donnée initiale régulière $u_0(x)$ telle que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_\Omega |u_n|^2 dx = +\infty.$$