CONCEPTION OPTIMALE DE STRUCTURES

G. ALLAIRE

27 Janvier 2010

CHAPITRE VI

OPTIMISATION GEOMETRIQUE (DEBUT)

Optimisation de la géométrie d'une membrane

Membrane occupant un ouvert borné variable Ω de $\mathbb{R}^N$ de frontière

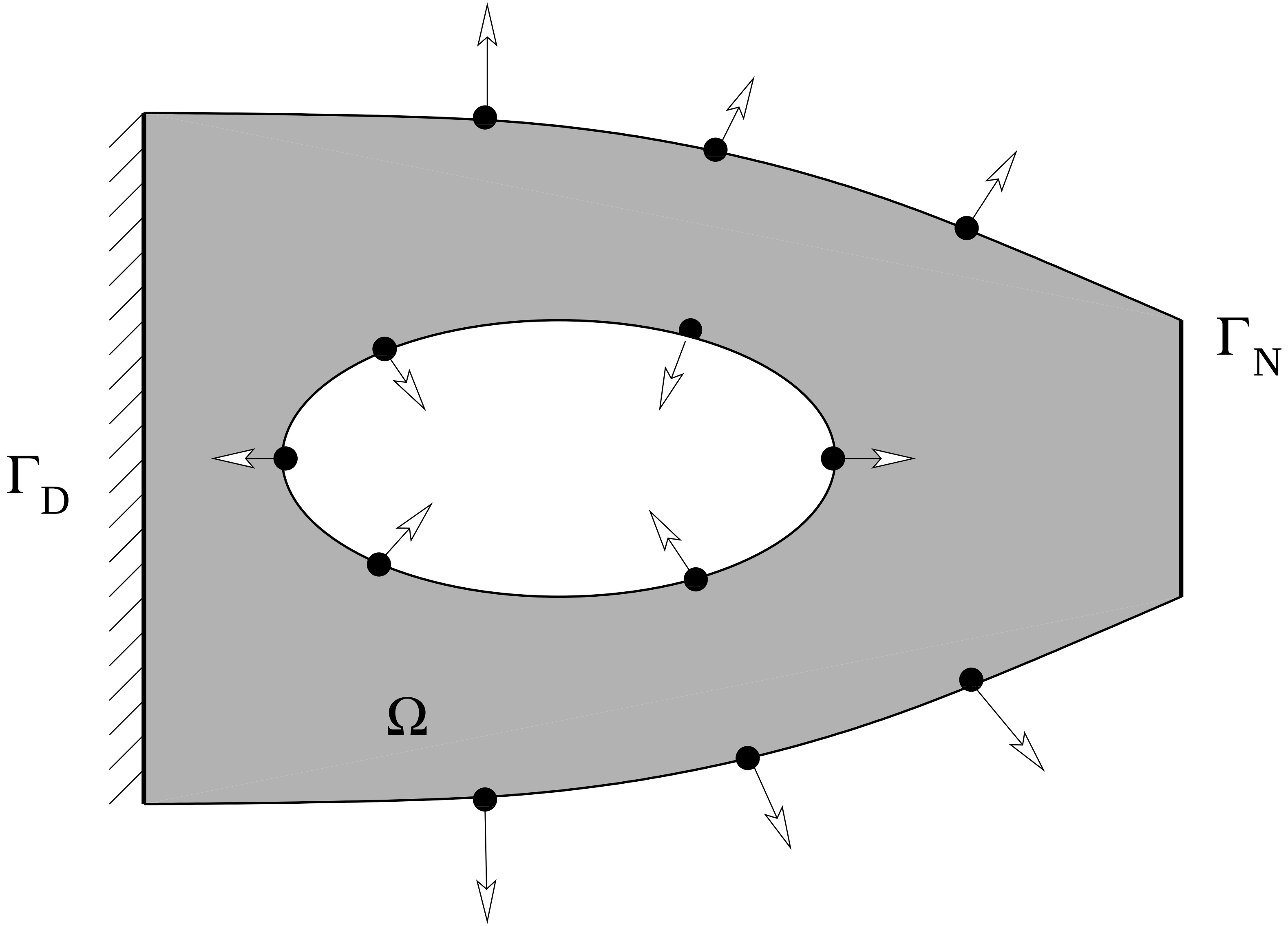
$$\partial\Omega = \Gamma \cup \Gamma_N \cup \Gamma_D,$$

où $\Gamma \neq \emptyset$ est la partie variable de la frontière, $\Gamma_D \neq \emptyset$ est une partie fixe de la frontière sur laquelle la membrane est fixée, et $\Gamma_N \neq \emptyset$ est une autre partie fixe de la frontière sur laquelle sont appliqués les efforts $g \in L^2(\Gamma_N)$.

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_D \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sur } \Gamma_N \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma \end{array} \right.$$

(Pas de force volumique pour simplifier)

Variation de frontière en optimisation géométrique



Optimisation de la géométrie d'une membrane

Problème d'optimisation de forme **géométrique**

$$\inf_{\Omega \in \mathcal{U}_{ad}} J(\Omega)$$

Il faut définir l'ensemble des formes admissibles $\mathcal{U}_{ad}$. Toute la difficulté est là.

Exemples:

☞ Compliance ou travail des forces extérieures (mesure de la rigidité)

$$J(\Omega) = \int_{\Gamma_N} gu \, ds$$

☞ Critère de moindres carrés pour atteindre un déplacement désiré $u_0 \in L^2(\Omega)$

$$J(\Omega) = \int_{\Omega} |u - u_0|^2 dx$$

où u dépend de Ω à travers l'équation d'état.

6.2 Résultats d'existence

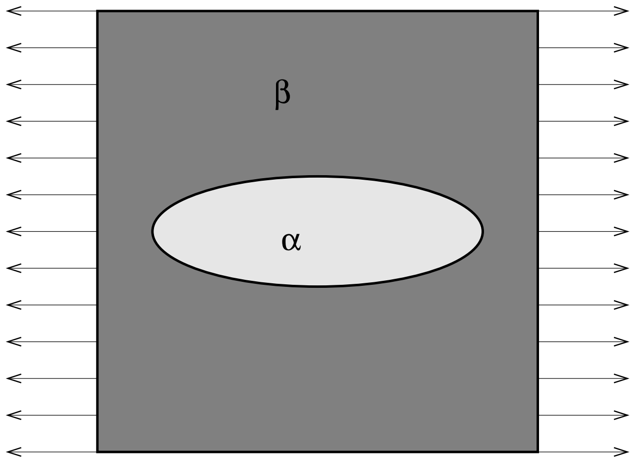
En général, il n'existe pas de forme optimale !

- ☞ Existence sous une condition géométrique.
- ☞ Existence sous une condition topologique.
- ☞ Existence sous une condition de régularité.
- ☞ Contre-exemple en l'absence de ces conditions.

Questions liées:

- ☞ Comment poser le problème ? Comment représenter des formes ?
- ☞ Calcul des variations sur les formes.
- ☞ Cadre mathématique pour faire du calcul numérique.

6.2.1 Contre-exemple de non-existence



Soit $D =]0;1[\times]0;L[$ rectangle de $\mathbb{R}^2$. On remplit D d'un mélange de deux matériaux homogènes isotropes caractérisés par un coefficient d'élasticité β pour le matériau solide, et α pour le matériau mou (presque du vide) avec $\beta >> \alpha > 0$. On désigne par $\chi(x) = 0,1$ la **fonction caractéristique** du matériau mou α, et on définit

$$a_\chi(x) = \alpha\chi(x) + \beta(1 - \chi(x)).$$

(Autre interprétation possible: épaisseur variable qui ne prend que deux valeurs.)

Equation d'état:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a_\chi \nabla u_\chi) = 0 & \text{dans } D \\ a_\chi \nabla u_\chi \cdot n = e_1 \cdot n & \text{sur } \partial D \end{cases}$$

Chargement horizontal uniforme.

Fonction objectif: compliance

$$J(\chi) = \int_{\partial D} (e_1 \cdot n) u_\chi ds$$

Ensemble admissible: **aucune contrainte géométrique ou régularité de la forme, i.e.** $\chi \in L^\infty(D; \{0,1\})$. Mais on impose une contrainte de volume

$$\mathcal{U}_{ad} = \left\{ \chi \in L^\infty(D; \{0,1\}) \text{ tel que } \frac{1}{|D|} \int_D \chi(x)\, dx = \theta \right\},$$

sinon on n'a intérêt à utiliser que du matériau solide !

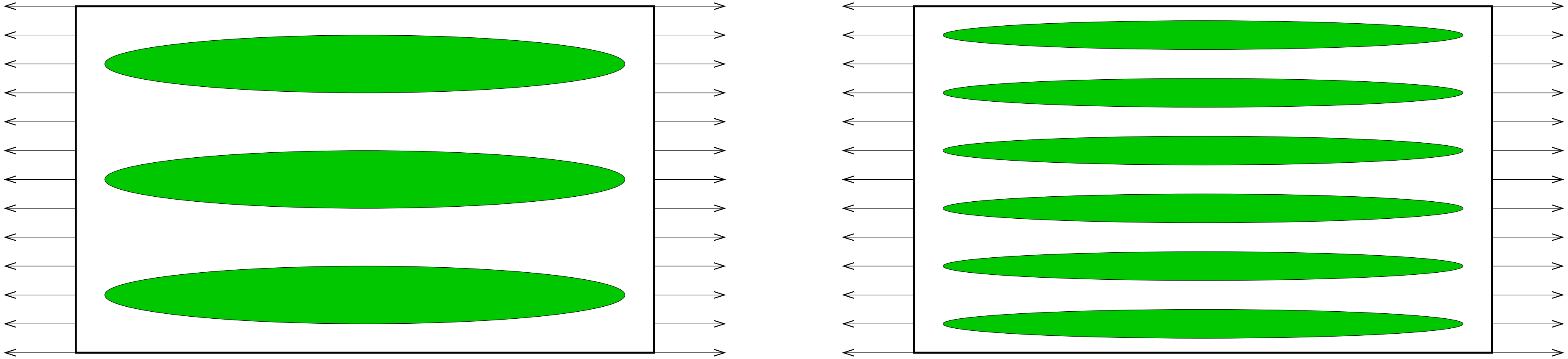
Le problème d'optimisation de formes est

$$\inf_{\chi \in \mathcal{U}_{ad}} J(\chi).$$

Non-existence

Proposition 6.2. Si $0 < \theta < 1$, il n'existe pas de forme optimale dans l'espace $\mathcal{U}_{ad}$.

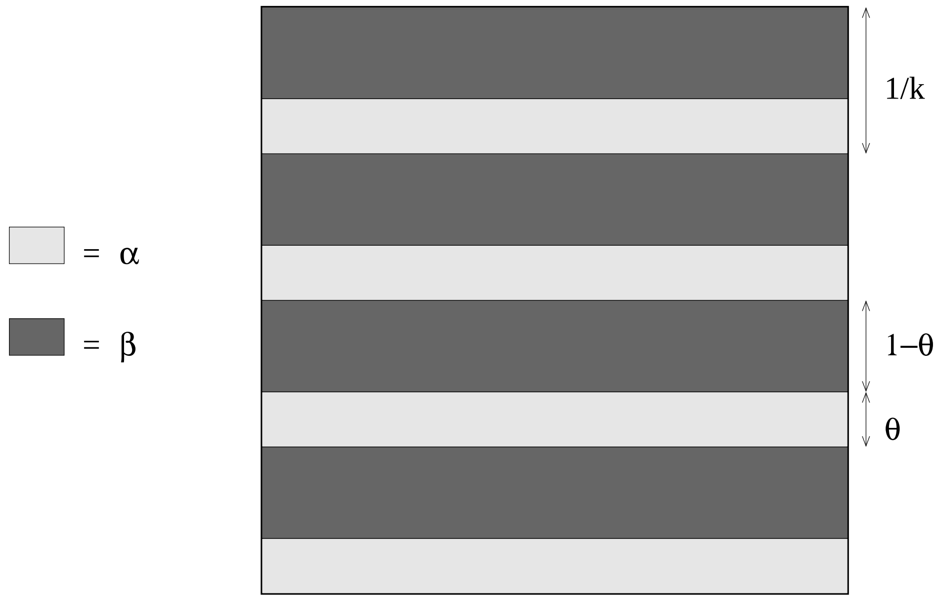
Remarque. Cause de la non-existence = absence de condition géométrique ou de régularité sur le bord de la forme.



$J(\chi_3) > J(\chi_6)$

Plein de petits trous sont meilleurs que peu de gros trous !

Intuition mécanique



Suite minimisante $k \to +\infty$: k fibres rigides alignées dans la direction des efforts e_1, et distribuées uniformément. Pour avoir une condition aux limites uniforme sur les bords latéraux, il faut que les fibres soient de plus en plus fines et alternent de plus en plus souvent avec des fibres molles.

Principe d'une suite minimisante qui n'atteint jamais le minimum.

6.2.2 Existence sous une condition géométrique

On se fixe un domaine de travail borné D. On définit

$$\mathcal{U}_{ad} = \left\{ \Omega \subset D \text{ tel que } \begin{array}{l} (i)\ \Omega \text{ vérifie la propriété du cône uniforme} \\ (ii)\ \Gamma_D \bigcup \Gamma_N \subset \partial\Omega \text{ et } |\Omega| = V_0 \end{array} \right\}$$

où V_0 est un volume imposé.

Théorème 6.6 (D. Chenais). Le problème d'optimisation

$$\inf_{\Omega \in \mathcal{U}_{ad}} J(\Omega)$$

admet au moins une solution optimale.

Remarque. La condition (i) met une borne sur le rayon de courbure du bord et empêche la formation de petits trous.

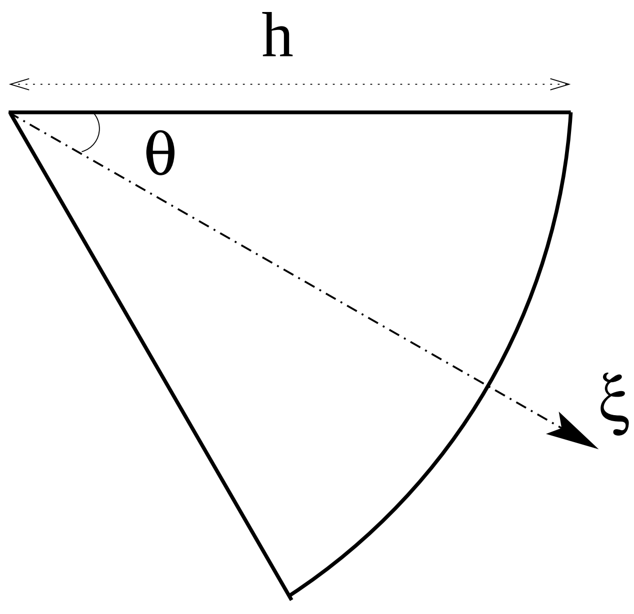
Définition d'un cône

Soit un angle $\theta \in]0, \pi/2[$, une hauteur $h > 0$, et une direction unité $\xi \in \mathbb{R}^N$. On appelle cône d'angle θ, de hauteur h et de direction ξ l'ouvert

$$C(\theta, h, \xi) = \left\{ x \in \mathbb{R}^N \text{ tel que } x \cdot \xi > \|x\| \cos\theta \text{ et } \|x\| < h \right\}.$$

Pour $y \in \mathbb{R}^N$, on appelle cône de sommet y l'ouvert

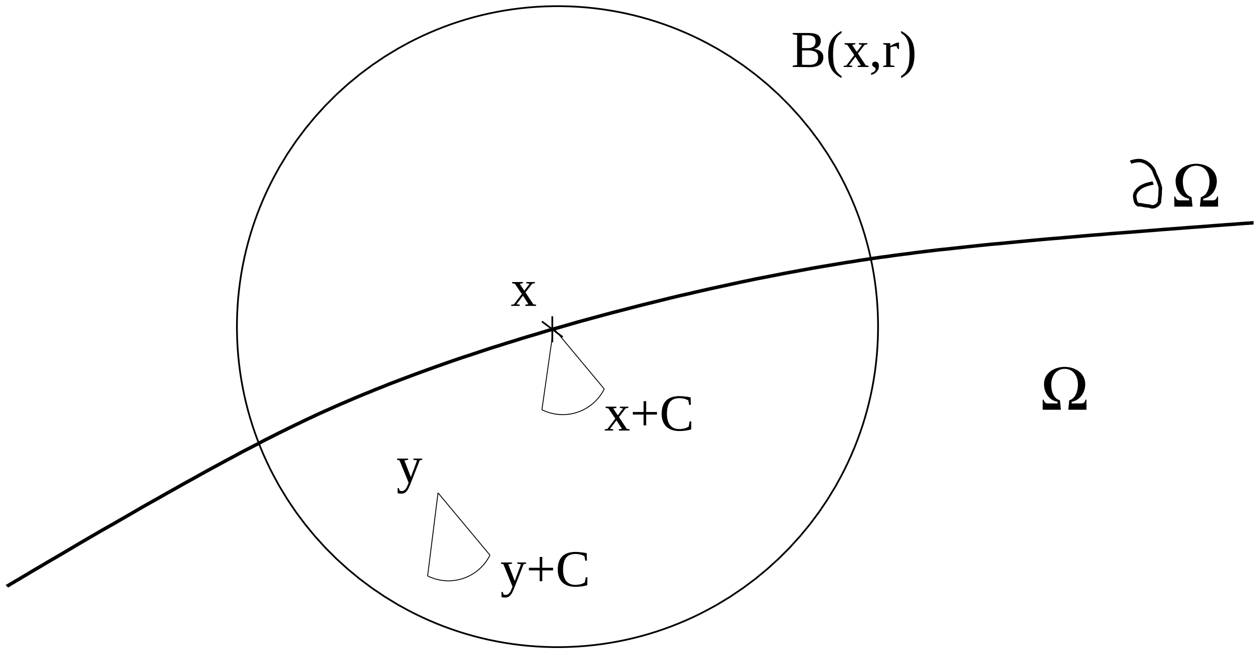
$$y + C(\theta, h, \xi) = \{ y + x \text{ tel que } x \in C(\theta, h, \xi) \}.$$



Propriété du cône uniforme

Soit un angle θ, une hauteur $h > 0$, et un rayon $r > 0$. Un ouvert Ω est dit "**vérifier la propriété du cône uniforme**" si pour tout point de son bord $x \in \partial\Omega$ il existe un vecteur unité ξ_x tel que

$$\forall\, y \in B(x,r) \cap \Omega \quad y + C(\theta, h, \xi_x) \subset \Omega.$$



6.2.3 Existence sous une condition topologique (en dimension $N = 2$)

On se fixe un domaine de travail borné $D \subset \mathbb{R}^2$. Pour toute forme $\Omega \subset D$ on définit son nombre de trous, ou plus précisément, le nombre de composantes connexes de son complémentaire

$$\#cc(D \setminus \Omega)$$

Pour un entier k fixé, et un volume V_0, on définit

$$\mathcal{U}_{ad} = \left\{ \Omega \subset D \text{ tel que } \begin{array}{l} (i)\ \#cc(D \setminus \Omega) \leq k \\ (ii)\ \Gamma_D \bigcup \Gamma_N \subset \partial\Omega \text{ et } |\Omega| = V_0 \end{array} \right\}$$

Théorème 6.9 (V. Sverak, A. Chambolle). Le problème d'optimisation

$$\inf_{\Omega \in \mathcal{U}_{ad}} J(\Omega)$$

admet au moins une solution optimale.

Remarque. La condition (i) empêche la formation de nombreux trous.

6.2.4 Existence sous condition de régularité

Cadre mathématique de transformation par difféomorphisme d'un domaine de référence régulier Ω_0 (utile aussi pour calculer un gradient).

Espace de difféomorphismes (ou bijections régulières) sur $\mathbb{R}^N$

$$\mathcal{T} = \left\{ T \text{ tel que } (T - \mathrm{Id}) \text{ et } (T^{-1} - \mathrm{Id}) \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N) \right\}.$$

(Il s'agit de perturbations autour de l'identité Id: $x \to x$.)

Définition de $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)$. Espace des champs de vecteurs lipschitziens:

$$\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^N & \to & \mathbb{R}^N \\ x & \to & \phi(x) \end{array} \right.$$

$$\|\phi\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^N} \left(|\phi(x)|_{\mathbb{R}^N} + |\nabla\phi(x)|_{\mathbb{R}^{N\times N}} \right) < \infty$$

Remarque: ϕ est continue mais ses dérivées sont seulement bornées.

Espace de formes admissibles

Soit Ω_0 un ouvert de référence régulier.

$$\mathcal{C}(\Omega_0) = \{\Omega \text{ tel qu'il existe } T \in \mathcal{T}, \Omega = T(\Omega_0)\} .$$

☞ Chaque forme Ω est paramétrée par un difféomorphisme T (non unique !).

☞ Toutes les formes admissibles ont la même topologie.

☞ On définit une pseudo-distance sur $\mathcal{D}(\Omega_0)$

$$d(\Omega_1, \Omega_2) = \inf_{T \in \mathcal{T} \mid T(\Omega_1) = \Omega_2} \left(\|T - \mathrm{Id}\| + \|T^{-1} - \mathrm{Id}\| \right)_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)} .$$

☞ Si Ω_0 est borné on peut utiliser $C^1(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)$ au lieu de $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)$.

Théorie d'existence

Espace de formes admissibles

$$\mathcal{U}_{ad} = \left\{ \Omega \in \mathcal{C}(\Omega_0) \text{ tel que } \Gamma_D \bigcup \Gamma_N \subset \partial\Omega \text{ et } |\Omega| = V_0 \right\}.$$

On fixe une constante $R > 0$, et on introduit le sous-espace régulier

$$\mathcal{U}_{ad}^{reg} = \{ \Omega \in \mathcal{U}_{ad} \text{ tel que } d(\Omega, \Omega_0) \leq R, \ \} .$$

Interprétation: contrainte de "faisabilité" pratique.

Théorème 6.11. Le problème d'optimisation

$$\inf_{\Omega \in \mathcal{U}_{ad}^{reg}} J(\Omega)$$

admet au moins une solution optimale.

Remarque. La topologie est la même pour toutes les formes dans $\mathcal{U}_{ad}$. De plus, les bords des formes de $\mathcal{U}_{ad}^{reg}$ ne peuvent pas trop osciller.

6.3 Différentiation par rapport au domaine

But: calculer une dérivée de $J(\Omega)$ en utilisant la paramétrisation par le difféomorphisme T.

On se limite aux difféomorphismes

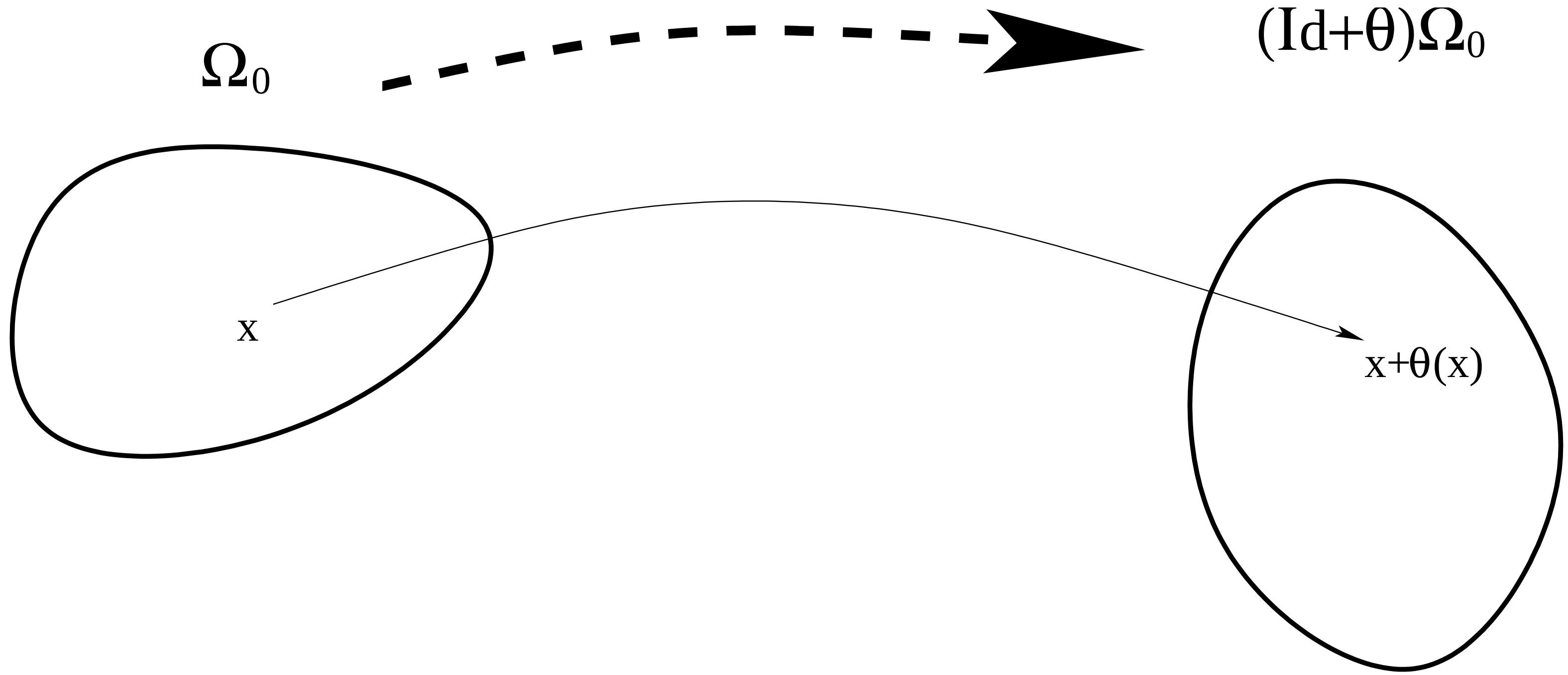
$$T = \mathrm{Id} + \theta \quad \text{avec} \quad \theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)$$

Idée: on va dériver $\theta \to J\big((\mathrm{Id} + \theta)\Omega_0\big)$ en 0.

Remarque. Cette approche généralise la méthode d'Hadamard de variation de la frontière le long de sa normale: $\Omega_0 \to \Omega_t$ pour $t \geq 0$

$$\partial\Omega_t = \big\{ x_t \in \mathbb{R}^N \mid \exists x_0 \in \partial\Omega_0 \mid x_t = x_0 + t\, g(x_0)\, n(x_0) \big\}$$

avec une fonction d'accroissement donnée g.



L'ensemble $\Omega = (\,\mathrm{Id} + \theta)(\Omega_0)$ est défini par

$$\Omega = \{x + \theta(x) \mid x \in \Omega_0\}\,.$$

On peut donc voir $\theta(x)$ comme un champ de vecteur qui **transporte** le domaine de référence Ω_0.

Lemme 6.13. Pour tout $\theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)$ vérifiant $\|\theta\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)} < 1$, alors $T = \mathrm{Id} + \theta$ est une bijection de $\mathbb{R}^N$ qui appartient à l'ensemble $\mathcal{T}$.

Démonstration. A partir de la formule

$$\theta(x) - \theta(y) = \int_0^1 (x-y) \cdot \nabla\theta\big(y + t(x-y)\big)dt\,,$$

on obtient que $|\ \theta(x) - \theta(y)\ | \leq \|\theta\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)}\ |\ x-y\ |$, et donc θ est strictement contractante. Alors $T = \mathrm{Id} + \theta$ est une bijection de $\mathbb{R}^N$.

En effet, $\forall b \in \mathbb{R}^N$ on introduit l'application $K(x) = b - \theta(x)$ qui est aussi contractante, et donc admet un unique point fixe y, c'est-à-dire $b = T(y)$ et T est bien une bijection de $\mathbb{R}^N$.

Comme $\nabla T = I + \nabla\theta$ (avec $I = \nabla\,\mathrm{Id}$) et que la norme de la matrice $\nabla\theta$ est strictement plus petite que 1 ($\|I\| = 1$), ∇T est inversible. On vérifie alors que $(T^{-1} - \mathrm{Id}) \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)$.

Définition de la dérivée par rapport au domaine

Définition 6.15. Soit $J(\Omega)$ une application de l'ensemble des formes admissibles $\mathcal{C}(\Omega_0)$ dans $\mathbb{R}$. On dit que J est différentiable en Ω_0 si la fonction

$$\theta \to J\big((\,\mathrm{Id} + \theta)(\Omega_0)\big)$$

est différentiable en 0 dans l'espace de Banach $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)$, i.e. il existe $L = J'(\Omega_0)$, une forme linéaire continue sur $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)$ telle que

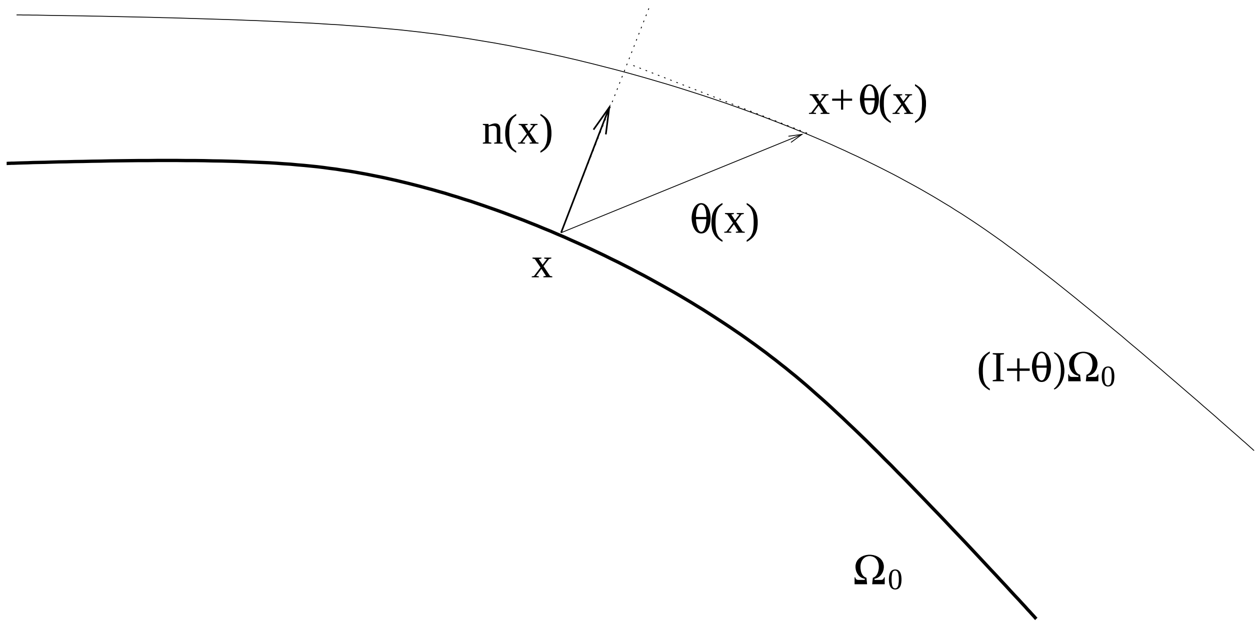
$$J\big((\,\mathrm{Id} + \theta)(\Omega_0)\big) = J(\Omega_0) + L(\theta) + o(\theta) \quad , \quad \text{avec} \quad \lim_{\theta \to 0} \frac{|o(\theta)|}{\|\theta\|} = 0\,.$$

On dit que $J'(\Omega_0)$ est une dérivée de forme, et $J'(\Omega_0)(\theta)$ est une dérivée directionnelle.

La dérivée directionnelle $J'(\Omega_0)(\theta)$ ne dépend que de la **composante normale de θ sur le bord** de Ω_0.

Cette propriété surprenante est liée au fait que les variations internes d'un domaine Ω ne change pas sa forme, i.e.

$$\theta \in C_c^1(\Omega)^N \text{ et } \|\theta\| << 1 \ \Rightarrow (\,\mathrm{Id} + \theta)\Omega = \Omega.$$



Proposition 6.15. Soit Ω_0 un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$. Soit J une application différentiable en Ω_0 de $\mathcal{C}(\Omega_0)$ dans $\mathbb{R}$. Sa dérivée directionnelle $J'(\Omega_0)(\theta)$ ne dépend que de la trace normale sur le bord de θ, i.e.

$$J'(\Omega_0)(\theta_1) = J'(\Omega_0)(\theta_2)$$

si $\theta_1, \theta_2 \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ sont tels que $\theta_2 - \theta_1 \in C^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ et

$$\theta_1 \cdot n = \theta_2 \cdot n \quad \text{sur } \partial\Omega_0.$$

Preuve. On pose $\theta = \theta_2 - \theta_1$. On introduit la solution de

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = \theta\big(y(t)\big) \\ y(0) = x \end{cases}$$

qui vérifie

$$y(t + t', x, \theta) = y(t, y(t', x, \theta), \theta) \quad \text{pour tout } t, t' \in \mathbb{R}$$
$$y(\lambda t, x, \theta) = y(t, x, \lambda\theta) \quad \text{pour tout } \lambda \in \mathbb{R}$$

On définit alors une application de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$, $x \ \rightarrow \ e^\theta(x) = y(1, x, \theta)$, qui est une bijection d'inverse $e^{-\theta}$, $e^0 = \mathrm{Id}$, et $t \rightarrow e^{t\theta}(x)$ est solution de l'e.d.o.

Lemme 6.20. Soit $\theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)$ tel que $\theta \cdot n = 0$ sur $\partial\Omega_0$. Alors on a $e^{t\theta}(\Omega_0) = \Omega_0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Preuve. Si c'est faux, $\exists x \in \Omega_0$ tel que la trajectoire $y(t,x)$ sorte de Ω_0 (ou réciproquement), donc $\exists t_0 > 0$ tel que $x_0 = y(t_0, x) \in \partial\Omega_0$.

Localement le bord $\partial\Omega_0$ est paramétré par une équation $\phi(x) = 0$ et la normale est $n = n_0/|n_0|$ avec $n_0 = \nabla\phi$ (définie dans un voisinage du bord).

On modifie le champ de vecteurs en $\tilde{\theta} = \theta - (\theta \cdot n)n$ pour obtenir une trajectoire modifiée $\tilde{y}(t, x_0)$ qui vérifie, pour tout $t \geq t_0$,

$$\frac{d}{dt}\Big(\phi(\tilde{y}(t,x))\Big) = \frac{d\tilde{y}}{dt} \cdot \nabla\phi(\tilde{y}) = \tilde{\theta}(\tilde{y}) \cdot n|n_0| = 0$$

Comme $\phi(\tilde{y}(t_0, x_0)) = 0$, on en déduit que $\phi(\tilde{y}(t, x_0)) = 0$, i.e., la trajectoire $\tilde{y}$ reste sur $\partial\Omega_0$. Or $\theta \cdot n = 0$ sur $\partial\Omega_0$, donc $\tilde{y}$ est **aussi** une trajectoire pour le champ de vecteur θ. Par unicité de la solution de l'e.d.o., on a $\tilde{y}(t) = y(t) \in \partial\Omega_0$ pour tout temps t ce qui est une contradiction avec $x \in \Omega_0$.

Remarque. Il est essentiel que θ soit tangent au bord $\partial\Omega_0$.

Suite de la preuve de la Proposition 6.15.

Comme $e^{t\theta}(\Omega_0) = \Omega_0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction J est constante le long de ce chemin, et on a

$$\frac{dJ\big(e^{t\theta}(\Omega_0)\big)}{dt}(0) = 0.$$

Par dérivation composée, on en déduit

$$\frac{dJ\big(e^{t\theta}(\Omega_0)\big)}{dt}(0) = J'(\Omega_0)\left(\frac{de^{t\theta}}{dt}\right)(0) = J'(\Omega_0)\,(\theta) = 0,$$

car la trajectoire $e^{t\theta}(x)$ vérifie

$$\frac{de^{t\theta}(x)}{dt}(0) = \theta(x),$$

ce qui donne le résultat par linéarité en θ.

Rappels

Pour calculer des exemples de dérivées de formes on rappelle des formules de changement de variables.

Lemme 6.21. Soit Ω_0 un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Soit un difféomorphisme $T \in \mathcal{T}$ et $1 \leq p \leq +\infty$. Alors $f \in L^p\big(T(\Omega_0)\big)$ si et seulement si $f \circ T \in L^p(\Omega_0)$, et on a

$$\int_{T(\Omega_0)} f\,dx = \int_{\Omega_0} f \circ T \mid \det \nabla T \mid dx$$

$$\int_{T(\Omega_0)} f \mid \det(\nabla T)^{-1} \mid dx = \int_{\Omega_0} f \circ T\,dx.$$

D'autre part, $f \in W^{1,p}\big(T(\Omega_0)\big)$ si et seulement si $f \circ T \in W^{1,p}(\Omega_0)$, et on a

$$\big(\nabla f\big) \circ T = \big((\nabla T)^{-1}\big)^t \nabla(f \circ T).$$

(^{t} = adjoint ou transposée)

Changement de variable dans une intégrale de bord.

Lemme 6.23. Soit Ω_0 un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$. Soit un difféomorphisme $T \in \mathcal{T} \cap C^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$. Soit $f \in L^1\big(\partial T(\Omega_0)\big)$, alors $f \circ T \in L^1(\partial\Omega_0)$, et on a

$$\int_{\partial T(\Omega_0)} f\, ds = \int_{\partial\Omega_0} f \circ T \,|\det \nabla T\,|\,\left|\,\left((\nabla T)^{-1}\right)^t n\,\right|_{\mathbb{R}^N} ds,$$

où n est la normale extérieure à $\partial\Omega_0$.

Exemples de dérivées

Proposition 6.22. Soit Ω_0 un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$. Soit $f(x) \in W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$ et soit J l'application de $\mathcal{C}(\Omega_0)$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$J(\Omega) = \int_\Omega f(x)\,dx.$$

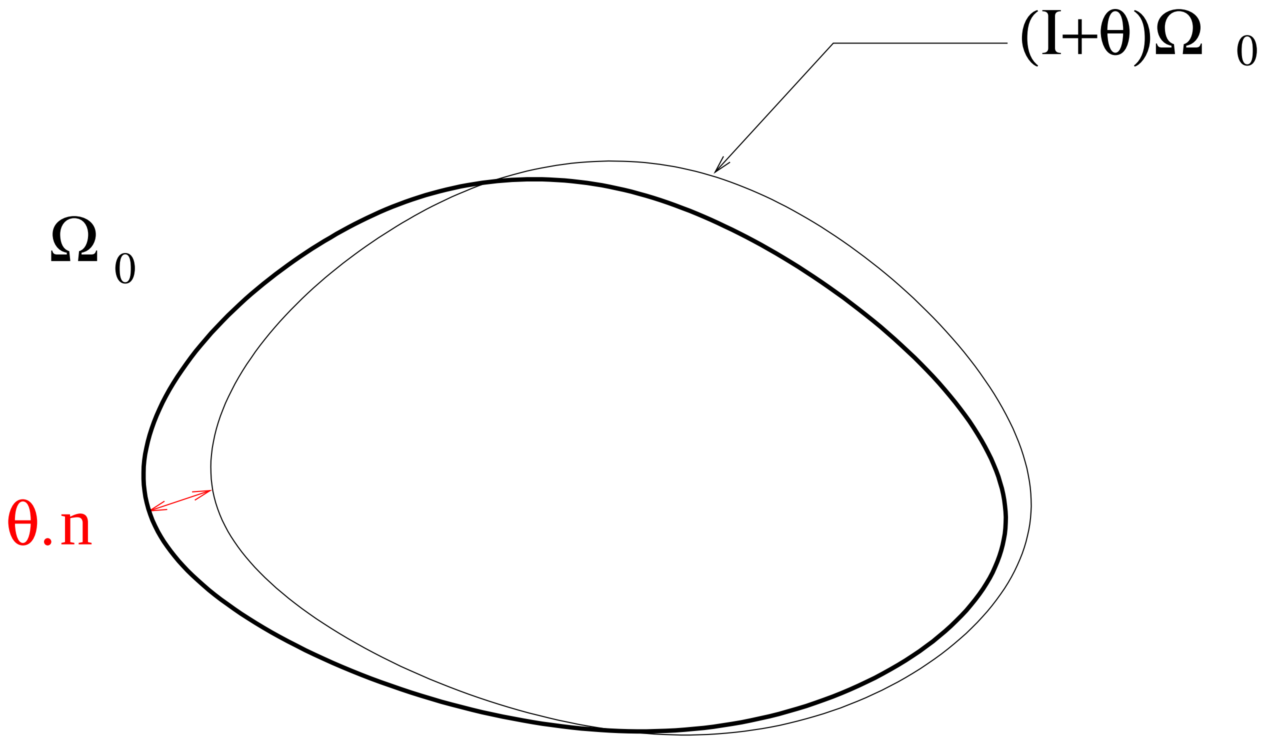
Alors J est différentiable en Ω_0 et on a

$$J'(\Omega_0)(\theta) = \int_{\Omega_0} \operatorname{div}\big(\theta(x)\,f(x)\big)\,dx = \int_{\partial\Omega_0} \theta(x)\cdot n(x)\,f(x)\,ds$$

pour tout $\theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)$.

Remarque. Pour ne pas se tromper dans les calculs, le plus sûr (mais pas le plus facile) est de faire un changement de variable pour se ramener au domaine fixe Ω_0.

Preuve intuitive



Surface balayée par la transformation $(\mathrm{Id}+\theta)\Omega_0 = \partial\Omega_0 \times \Big(\theta \cdot n\Big)$.

Donc

$$\int_{(\mathrm{Id}+\theta)\Omega_0} f(x)\,dx = \int_{\Omega_0} f(x)\,dx + \int_{\partial\Omega_0} f(x)\theta\cdot n\,ds + o(\theta).$$

Preuve. On réécrit $J(\Omega)$ comme une intégrale sur le domaine fixe Ω_0

$$J\big((\,\mathrm{Id}+\theta)\Omega_0\big) = \int_{\Omega_0} f\circ(\,\mathrm{Id}+\theta)\,|\,\det(\,\mathrm{Id}+\nabla\theta)\,|\,dx.$$

L'application $\theta \to \det(\,\mathrm{Id}+\nabla\theta)$ est dérivable de $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ car

$$\det(\,\mathrm{Id}+\nabla\theta) = \det\,\mathrm{Id} + \,\mathrm{div}\theta + o(\theta) \quad \text{avec} \quad \lim_{\theta\to 0}\frac{\|o(\theta)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)}}{\|\theta\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)}} = 0.$$

D'autre part, si $f(x)\in W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$, l'application $\theta \to f\circ(\,\mathrm{Id}+\theta)$ est dérivable de $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)$ dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ car

$$f\circ(\,\mathrm{Id}+\theta)(x) = f(x)+\nabla f(x)\cdot\theta(x)+o(\theta) \quad \text{avec} \quad \lim_{\theta\to 0}\frac{\|o(\theta)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}}{\|\theta\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)}} = 0.$$

Par composition de ces deux dérivées on obtient le résultat.

Proposition 6.24. Soit Ω_0 un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$. Soit $f(x) \in W^{2,1}(\mathbb{R}^N)$ et soit J l'application de $\mathcal{C}(\Omega_0)$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$J(\Omega) = \int_{\partial\Omega} f(x)\, ds.$$

Alors J est différentiable en Ω_0 et on a

$$J'(\Omega_0)(\theta) = \int_{\partial\Omega_0} \left(\nabla f \cdot \theta + f\big(\mathrm{div}\theta - \nabla\theta n \cdot n\big)\right) ds$$

pour tout $\theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$. Par intégration par parties (sur le bord), cette formule est équivalente à

$$J'(\Omega_0)(\theta) = \int_{\partial\Omega_0} \theta \cdot n \left(\frac{\partial f}{\partial n} + Hf\right) ds,$$

où H est la courbure moyenne de $\partial\Omega_0$ définie par $H = \mathrm{div} n$.

Interprétation

Deux exemples simples:

☞ Si $\partial\Omega_0$ est un plan, alors $H = 0$ et la variation de l'intégrale de bord est proportionnelle à la dérivée normale de f.

☞ Si $f \equiv 1$, alors $J(\Omega)$ est le périmètre (en 2-D) ou la surface (en 3-D) du domaine Ω et sa variation est proportionnelle à la courbure.

Preuve. Après changement de variable on a

$$J\big((\,\mathrm{Id}+\theta)\Omega_0\big) = \int_{\partial\Omega_0} f\circ(\,\mathrm{Id}+\theta)|\det(\,\mathrm{Id}+\nabla\theta)|\ \left|\,\big((\,\mathrm{Id}+\nabla\theta)^{-1}\big)^t n\,\right|_{\mathbb{R}^N} ds.$$

On sait déjà que $\theta\to\det(\,\mathrm{Id}+\nabla\theta)$ et $\theta\to f\circ(\,\mathrm{Id}+\theta)$ sont dérivables.

Par ailleurs, $\theta\to\big((\,\mathrm{Id}+\nabla\theta)^{-1}\big)^t n$ est dérivable de $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)$ dans $L^\infty(\partial\Omega_0;\mathbb{R}^N)$ car

$$\big((\,\mathrm{Id}+\nabla\theta)^{-1}\big)^t n = n-(\nabla\theta)^t n+o(\theta)\quad\text{avec}\quad \lim_{\theta\to 0}\frac{\|o(\theta)\|_{L^\infty(\partial\Omega_0;\mathbb{R}^N)}}{\|\theta\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)}}=0.$$

Par composition avec la dérivée de l'application $g\to|\,g\,|_{\mathbb{R}^N}$, on en déduit

$$\left|\,\big((\,\mathrm{Id}+\nabla\theta)^{-1}\big)^t n\,\right|_{\mathbb{R}^N} = 1-(\nabla\theta)^t n\cdot n+o(\theta)\quad\text{avec}\quad \lim_{\theta\to 0}\frac{\|o(\theta)\|_{L^\infty(\partial\Omega_0)}}{\|\theta\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)}}=0.$$

Par composition de ces trois dérivées on obtient le résultat. La formule avec la courbure est alors le produit d'une intégration par parties sur la surface $\partial\Omega_0$.

6.3.3. Dérivation d'une fonction dépendant du domaine

Soit une fonction $u(\Omega, x)$ définie sur un domaine Ω.

Il existe deux notions de dérivée:

1) Dérivée eulérienne (ou de forme) U

$$u((\mathrm{Id} + \theta)\Omega_0, x) = u(\Omega_0, x) + U(\theta, x) + o(\theta) \quad , \quad \text{avec} \quad \lim_{\theta \to 0} \frac{\|o(\theta)\|}{\|\theta\|} = 0$$

OK si $x \in \Omega_0 \cap (\mathrm{Id} + \theta)\Omega_0$ (définition locale non valable sur le bord).

2) Dérivée lagrangienne (ou matérielle) Y

On définit la **transportée** $\overline{u}(\theta)$ sur Ω_0 par

$$\overline{u}(\theta, x) = u \circ (\mathrm{Id} + \theta) = u\Big((\mathrm{Id} + \theta)\Omega_0, x + \theta(x)\Big) \quad \forall\, x \in \Omega_0.$$

On obtient la dérivée lagrangienne Y en dérivant $\overline{u}(\theta, x)$

$$\overline{u}(\theta, x) = \overline{u}(0, x) + Y(\theta, x) + o(\theta) \quad , \quad \text{avec} \quad \lim_{\theta \to 0} \frac{\|o(\theta)\|}{\|\theta\|} = 0 \ ,$$

En dérivant $\overline{u} = u \circ (\,\mathrm{Id} + \theta)$, on vérifie que

$$Y(\theta, x) = U(\theta, x) + \theta(x) \cdot \nabla u(\Omega_0, x).$$

La dérivée eulérienne, quoique naturelle, est très délicate à utiliser et souvent formelle. Par exemple, si $u \in H_0^1(\Omega)$, l'espace de définition varie avec Ω... ou bien quelle condition aux limites vérifie la dérivée ?

On recommande l'usage de la dérivée lagrangienne pour ne pas se tromper.

Remarque. On fera les calculs avec Y mais on exprimera les résultats avec U (plus simple).

Dérivation composée par rapport au domaine

Proposition 6.28. Soit Ω_0 un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$. Soit $u(\Omega) \in L^1(\mathbb{R}^N)$. On suppose que sa transportée $\overline{u}$ est dérivable en 0 de $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)$ dans $L^1(\mathbb{R}^N)$, de dérivée Y. Alors l'application

$$J(\Omega) = \int_\Omega u(\Omega)\, dx$$

est différentiable en Ω_0 et $\forall\theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)$ on a

$$J'(\Omega_0)(\theta) = \int_{\Omega_0} \big(u(\Omega_0)\,\mathrm{div}\theta + Y(\theta)\big)\, dx.$$

Autrement dit, avec la dérivée eulérienne U on a

$$J'(\Omega_0)(\theta) = \int_{\Omega_0} \big(U(\theta) + \,\mathrm{div}(u(\Omega_0)\theta)\big)\, dx.$$

De même, si $\overline{u}(\theta)$ est dérivable en 0 comme application de $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)$ dans $L^1(\partial\Omega_0)$, alors l'application $J(\Omega) = \int_{\partial\Omega} u(\Omega)\,dx$ est différentiable en Ω_0 et on a

$$J'(\Omega_0)(\theta) = \int_{\partial\Omega_0} \Big(u(\Omega_0)\,(\,\mathrm{div}\theta - \nabla\theta n \cdot n) + Y(\theta) \Big) ds.$$

Autrement dit, avec la dérivée eulérienne U on a

$$J'(\Omega_0)(\theta) = \int_{\partial\Omega_0} \left(U(\theta) + \theta \cdot n \left(\frac{\partial u(\Omega_0)}{\partial n} + H u(\Omega_0) \right) \right) dx.$$

6.3.4 Dérivation d'une équation par rapport au domaine

Désormais, $u(\Omega)$ est solution d'une e.d.p. dans le domaine Ω.

On rappelle que

$$Y(\theta, x) = U(\theta, x) + \theta(x) \cdot \nabla u(\Omega_0, x).$$

La dérivée eulérienne, quoique naturelle, est très délicate à utiliser et souvent formelle. Par exemple, si $u \in H_0^1(\Omega)$, l'espace de définition varie avec Ω... ou bien quelle condition aux limites vérifie la dérivée ?

On recommande l'usage de la dérivée lagrangienne: on se ramène au domaine fixe Ω_0 et on dérive par rapport à θ. C'est la façon la plus sûre et la plus rigoureuse de calculer une dérivée de u, mais les calculs sont un peu lourds.

On verra plus tard une méthode formelle mais plus simple.

Les résultats dépendent du type de condition aux limites.

Condition aux limites de Dirichlet

Pour $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ on considère le problème aux limites

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

qui admet une unique solution $u(\Omega) \in H_0^1(\Omega)$.

Sa formulation variationnelle est: trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx = \int_\Omega f \phi \, dx \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega).$$

(Simplification du livre avec $g = 0$.)

On définit $\Omega = (\,\mathrm{Id} + \theta)(\Omega_0)$ et le changement de variable

$$x = y + \theta(y) \quad y \in \Omega_0 \quad x \in \Omega.$$

Proposition 6.30. Soit la solution $u(\Omega) \in H_0^1(\Omega)$ et sa transportée $\overline{u}(\theta) \in H_0^1(\Omega_0)$

$$\overline{u}(\theta)(y) = u(\Omega)(x) = u\Big((\,\mathrm{Id} + \theta)(\Omega_0)\Big) \circ (\,\mathrm{Id} + \theta)(y).$$

L'application $\theta \to \overline{u}(\theta)$, de $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ dans $H^1(\Omega_0)$, est différentiable en 0, et sa dérivée dans la direction θ, appelée dérivée Lagrangienne est

$$Y = \langle \overline{u}'(0), \theta \rangle$$

où $Y \in H_0^1(\Omega_0)$ est la solution unique de

$$\begin{cases} -\Delta Y = -\Delta\big(\theta \cdot \nabla u(\Omega_0)\big) & \text{dans } \Omega_0 \\ Y = 0 & \text{sur } \partial\Omega_0. \end{cases}$$

Démonstration. On fait le changement de variable $x = y + \theta(y)$ avec $y \in \Omega_0$ dans la formulation variationnelle

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx = \int_\Omega f \phi \, dx \quad \forall\, \phi \in H_0^1(\Omega).$$

On prend une fonction test $\phi = \psi \circ (\,\mathrm{Id} + \theta)^{-1}$, i.e. $\psi(y) = \phi(x)$. On rappelle que

$$\left(\nabla \phi\right) \circ (\,\mathrm{Id} + \theta) = \left((I + \nabla\theta)^{-1}\right)^t \nabla \Big(\phi \circ (\,\mathrm{Id} + \theta)\Big).$$

On obtient: trouver $\overline{u} \in H_0^1(\Omega_0)$ tel que, pour tout $\psi \in H_0^1(\Omega_0)$,

$$\int_{\Omega_0} A(\theta) \nabla \overline{u} \cdot \nabla \psi \, dy = \int_{\Omega_0} f \circ (\,\mathrm{Id} + \theta)\, \psi \,|\det(\,\mathrm{Id} + \nabla\theta)| dy$$

avec $A(\theta) = |\det(I + \nabla\theta)| (I + \nabla\theta)^{-1} \left((I + \nabla\theta)^{-1}\right)^t$.

On dérive par rapport à θ en 0 la formulation variationnelle

$$\int_{\Omega_0} A(\theta)\nabla\overline{u}\cdot\nabla\psi\, dy = \int_{\Omega_0} f\circ(\,\mathrm{Id}+\theta)\,\psi\,|\det(\,\mathrm{Id}+\nabla\theta)|dy$$

où ψ est une fonction qui ne dépend pas de θ.

On a déjà vu lors de la démonstration de la Proposition 6.22 que le membre de droite est dérivable. De plus, l'application $\theta\to A(\theta)$ est dérivable car

$$A(\theta) = (1+\ \mathrm{div}\theta)I - \nabla\theta - (\nabla\theta)^t + o(\theta) \quad \text{avec} \quad \lim_{\theta\to 0}\frac{\|o(\theta)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^{N^2})}}{\|\theta\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)}} = 0.$$

Comme $\overline{u}(\theta = 0) = u(\Omega_0)$, on obtient donc

$$\int_{\Omega_0} \nabla Y \cdot \nabla \psi \, dy + \int_{\Omega_0} \Big(\mathrm{div}\theta \, I - \nabla\theta - (\nabla\theta)^t \Big) \nabla u(\Omega_0) \cdot \nabla\psi \, dy = \int_{\Omega_0} \mathrm{div}\Big(f\theta \Big) \psi \, dy$$

Comme $\overline{u}(\theta) \in H^1_0(\Omega_0)$, sa dérivée Y appartient aussi à $H^1_0(\Omega_0)$. Donc Y est la solution de

$$\begin{cases} -\Delta Y = \mathrm{div}\left[\Big(\mathrm{div}\theta \, I - \nabla\theta - (\nabla\theta)^t \Big) \nabla u(\Omega_0) \right] + \mathrm{div}\Big(f\theta \Big) & \text{dans } \Omega_0 \\ Y = 0 & \text{sur } \partial\Omega_0. \end{cases}$$

On utilise alors $\Delta u(\Omega_0) = -f$ dans Ω_0, ainsi que l'identité suivante (qui se démontre par simple identification pour tout $v \in H^1(\Omega_0)$ tel que $\Delta v \in L^2(\Omega_0)$)

$$\Delta \left(\nabla v \cdot \theta \right) = \mathrm{div} \Big((\Delta v)\theta - (\,\mathrm{div}\theta) \nabla v + \Big(\nabla\theta + (\nabla\theta)^t \Big) \nabla v \Big) \,,$$

pour en déduire le résultat. (ouf !)

$\boxed{\text{Dérivée de forme } U}$

Corollaire 6.32. La dérivée eulérienne U de la solution $u(\Omega)$, définie par la formule

$$U = Y - \nabla u(\Omega_0) \cdot \theta,$$

est solution dans $H^1(\Omega_0)$ de

$$\begin{cases} -\Delta U = 0 & \text{dans } \Omega_0 \\ U = -(\theta \cdot n) \frac{\partial u(\Omega_0)}{\partial n} & \text{sur } \partial\Omega_0. \end{cases}$$

(Démonstration évidente à partir de Y.)

Nous allons montrer formellement (sans passer par Y) que U est la dérivée eulérienne "locale" de $\Omega \to u(\Omega)$ (autrement dit, on dérive dans un repère fixe).

Dans la formulation variationnelle on prend une fonction test ϕ à support compact $\omega \subset \Omega$

$$\int_\omega \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx = \int_\omega f \phi \, dx.$$

Si on dérive par rapport à Ω, ni la fonction test, ni le domaine d'intégration n'en dépende. On trouve donc

$$\int_\omega \nabla U \cdot \nabla \phi \, dx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\Delta U = 0.$$

Pour trouver la condition aux limites on dérive formellement

$$\int_{\partial\Omega} u(\Omega)\psi \, ds = 0 \quad \forall \psi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$$

$$\Rightarrow \int_{\partial\Omega_0} U\psi \, ds + \int_{\partial\Omega_0} \left(\frac{\partial(u\psi)}{\partial n} + Hu\psi \right) \theta \cdot n \, ds = 0$$

qui donne le bon résultat car $u = 0$ sur $\partial\Omega_0$.

Remarque. Le calcul direct de U n'est pas toujours aussi simple !