ECOLE POLYTECHNIQUE
MAJEURE SeISM
Conception optimale de structures (G. Allaire)
Corrigé de l'examen écrit du 30 Mars 2005 (2 heures)

1 Optimisation paramétrique : 7 points

1. On introduit un espace de Hilbert adéquat $V = \{\phi \in H^1(\Omega) \text{ tel que } \phi = 0 \text{ sur } \Gamma_D\}$. La formulation variationnelle du problème s'obtient en multipliant l'équation par une fonction test $\phi \in V$, en intégrant par parties, et en utilisant les conditions aux limites. La formulation variationnelle est donc : trouver $u \in V$ tel que
$$\int_\Omega h\nabla u \cdot \nabla\phi\, dx = \int_\Omega f\phi\, dx \quad \forall\, \phi \in V.$$
Par définition le Lagrangien est la somme de la fonction objectif et de la formulation variationnelle de l'équation d'état considérée comme une contrainte. Donc, pour tout $(h, v, q) \in \mathcal{U}_{ad} \times V \times V$, on a
$$\mathcal{L}(h, v, q) = \int_{\Gamma_N} |v - u_0|^2 ds + \int_\Omega h\nabla v \cdot \nabla q\, dx - \int_\Omega fq\, dx.$$
La formulation variationnelle de l'équation adjointe est par définition donnée par
$$\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}(h, u, p), \phi\rangle = 0 \quad \forall\, \phi \in V,$$
ce qui est équivalent à
$$2\int_{\Gamma_N} (u - u_0)\phi ds + \int_\Omega h\nabla p \cdot \nabla\phi\, dx = 0 \quad \forall\, \phi \in V.$$
Par conséquent l'état adjoint $p \in V$ est solution de
$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(h\nabla p) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ h\frac{\partial p}{\partial n} = -2(u - u_0) & \text{sur } \Gamma_N \\ p = 0 & \text{sur } \Gamma_D. \end{cases}$$

2. La dérivée de la fonction objectif $J(h)$ est donnée, pour tout $k \in L^\infty(\Omega)$, par
$$\langle J'(h), k\rangle = \int_\Omega J'(h)k\, dx = \langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h}(h, u, p), k\rangle = \int_\Omega k\nabla u \cdot \nabla p\, dx.$$
Par conséquent, on a $J'(h) = \nabla u \cdot \nabla p$.

2 Optimisation géométrique : 8 points

1. On utilise à nouveau l'espace de Hilbert $V = \{\phi \in H^1(\Omega)$ tel que $\phi = 0$ sur $\Gamma_D\}$. La formulation variationnelle est : trouver $u \in V$ tel que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx = \int_{\Gamma_N} g \cdot n \, \phi \, ds \quad \forall \phi \in V.$$

2. Le Lagrangien est la somme de la fonction objectif et de la formulation variationnelle, c'est-à-dire

$$\mathcal{L}(\Omega, v, q) = \int_{\Gamma_N} g \cdot n \, v \, ds + \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla q \, dx - \int_{\Gamma_N} g \cdot n \, q \, ds$$

Comme Γ_D est fixe, on choisit v et q dans l'espace $H^1(\mathbb{R}^2)$ tels que $v = q = 0$ sur Γ_D, et les trois variables (Ω, v, q) sont bien indépendantes. La formulation variationnelle de l'équation adjointe est

$$\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}(\Omega, u, p), \phi \rangle = 0 \quad \forall \phi \in H^1(\mathbb{R}^2) \text{ tel que } \phi = 0 \text{ sur } \Gamma_D,$$

ce qui est équivalent à

$$\int_{\Gamma_N} g \cdot n \, \phi \, ds + \int_\Omega \nabla \phi \cdot \nabla p \, dx = 0 \quad \forall \phi.$$

Par conséquent l'état adjoint $p \in H^1(\mathbb{R}^2)$ est solution de

$$\begin{cases} -\Delta p = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial p}{\partial n} = -g \cdot n & \text{sur } \Gamma_N, \\ p = 0 & \text{sur } \Gamma_D, \end{cases}$$

ce qui implique que $p = -u$ (le problème est auto-adjoint).

3. Comme la normale n dépend de la forme Ω, on l'élimine en réécrivant le Lagrangien

$$\mathcal{L}(\Omega, v, q) = \int_\Omega \mathrm{div}(vg) \, dx + \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla q \, dx - \int_\Omega \mathrm{div}(qg) \, dx$$

Formellement la dérivée de forme s'obtient par

$$J'(\Omega)(\theta) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Omega}(\Omega, u, p)(\theta) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Omega}(\Omega, u, -u)(\theta).$$

Comme Γ_D est fixe et seul Γ_N peut varier, on en déduit

$$J'(\Omega)(\theta) = -\int_{\Gamma_N} \theta \cdot n \left(|\nabla u|^2 - 2\mathrm{div}(ug) \right) ds.$$

3 Homogénéisation : 5 points

1. Les bornes de Hashin-Shtrikman en conduction pour un matériau composite isotrope sont

$$\frac{N}{a^* - \alpha} \leq \frac{1}{\lambda_\theta^- - \alpha} + \frac{N-1}{\lambda_\theta^+ - \alpha} \quad \text{et} \quad \frac{N}{\beta - a^*} \leq \frac{1}{\beta - \lambda_\theta^-} + \frac{N-1}{\beta - \lambda_\theta^+}$$

avec

$$\lambda_\theta^- = \left(\frac{\theta}{\alpha} + \frac{1-\theta}{\beta}\right)^{-1} \text{ et } \lambda_\theta^+ = \theta\alpha + (1-\theta)\beta.$$

2. Un calcul simple donne

$$\frac{1}{\lambda_\theta^+ - \alpha} = \frac{1}{(1-\theta)\alpha\eta}, \quad \frac{1}{\lambda_\theta^- - \alpha} = \frac{1+\theta\eta}{(1-\theta)\alpha\eta}$$

d'où l'on déduit

$$\frac{a^* - \alpha}{\alpha} \geq \frac{(1-\theta)\eta}{1+\theta\eta/N} = (1-\theta)\eta - \frac{\theta(1-\theta)}{N}\eta^2 + \mathcal{O}(\eta^3).$$

Autrement dit

$$a^* \geq \alpha\left(1 + (1-\theta)\eta - \frac{\theta(1-\theta)}{N}\eta^2 + \mathcal{O}(\eta^3)\right).$$

Un calcul similaire donne

$$\frac{1}{\beta - \lambda_\theta^+} = \frac{1}{\theta\alpha\eta}, \quad \frac{1}{\beta - \lambda_\theta^-} = \frac{1+\theta\eta}{\theta\beta\eta}$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\beta - a^*}{\alpha} \geq \frac{\theta\eta(1+\eta)}{1+(\theta+N-1)\eta/N} = \theta\eta\left(1 + \eta - (\theta+N-1)\eta/N + \mathcal{O}(\eta^2)\right).$$

Autrement dit

$$a^* \leq \alpha\left(1 + (1-\theta)\eta - \frac{\theta(1-\theta)}{N}\eta^2 + \mathcal{O}(\eta^3)\right).$$

Les bornes supérieure et inférieure coïncident à l'ordre 2 et on obtient la formule "exacte", dite de faible amplitude,

$$a^* = \theta\alpha + (1-\theta)\beta - \frac{\theta(1-\theta)\alpha}{N}\eta^2 + \mathcal{O}(\eta^3)$$

qui est indépendent de la microstructure du mélange et ne dépend que de la proportion du mélange. On remarque que a^* est bien inférieur à la moyenne arithmétique dans cette formule.