ECOLE POLYTECHNIQUE
Programme d'Approfondissement SISM
Conception optimale de structures (G. Allaire)
Corrigé de l'examen écrit du 18 Mars 2009 (2 heures)

1 Optimisation paramétrique : 10 points

1. Par définition le Lagrangien est la somme de la fonction objectif et de la formulation variationnelle de l'équation d'état considérée comme une contrainte. Cette formulation variationnelle est : trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\int_\Omega (V \cdot \nabla u \phi + h \nabla u \cdot \nabla \phi)\, dx = \int_\Omega f \phi\, dx \quad \forall\, \phi \in H_0^1(\Omega).$$

Par conséquent, pour tout $(h, v, q) \in \mathcal{U}_{ad} \times H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, le Lagrangien est

$$\mathcal{L}(h, v, q) = \int_\Omega h|v|^2 dx + \int_\Omega (V \cdot \nabla v q + h \nabla v \cdot \nabla q)\, dx - \int_\Omega f q\, dx.$$

La formulation variationnelle de l'équation adjointe est par définition donnée par

$$\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}(h, u, p), \phi \rangle = 0 \quad \forall\, \phi \in H_0^1(\Omega),$$

ce qui est équivalent à

$$\int_\Omega 2hu\phi\, dx + \int_\Omega (V \cdot \nabla \phi p + h \nabla p \cdot \nabla \phi)\, dx = 0 \quad \forall\, \phi \in H_0^1(\Omega).$$

Après intégration par parties, comme $\mathrm{div} V = 0$, on obtient l'équation adjointe

$$\begin{cases} -V \cdot \nabla p - \mathrm{div}\,(h \nabla p) = -2hu & \text{dans } \Omega, \\ p = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

2. La dérivée de la fonction objectif $J(h)$ est donnée, pour tout $k \in L^\infty(\Omega)$, par

$$\langle J'(h), k \rangle = \int_\Omega J'(h) k\, dx = \langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h}(h, u, p), k \rangle.$$

On obtient donc

$$\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h}(h, u, p), k \rangle = \int_\Omega k \left(|u|^2 + \nabla u \cdot \nabla p \right) dx,$$

c'est-à-dire que

$$J'(h) = |u|^2 + \nabla u \cdot \nabla p.$$

3. Si la fonction objetif était la compliance

$$\tilde{J}(h) = \int_\Omega f(x)\, u(x)\, dx,$$

on aurait un état adjoint donné par

$$\begin{cases} -V \cdot \nabla p - \mathrm{div}\,(h \nabla p) = -f & \text{dans } \Omega, \\ p = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Comme le signe de la vitesse a changé dans l'équation adjointe (par rapport à l'équation d'état), on ne peut pas dire que $u = \pm p$ en général. Le problème n'est donc pas auto-adjoint.

2 Optimisation géométrique : 10 points

1. Par définition le Lagrangien est la somme de la fonction objectif et de la formulation variationnelle de l'équation d'état considérée comme une contrainte. Comme Γ_D est fixe, on peut définir un espace de fonctions

$$V = \{v \in H^1(\mathbb{R}^2) \text{ tel que } v = 0 \text{ sur } \Gamma_D\}.$$

Pour tout $(\Omega, v, q) \in \mathcal{U}_{ad} \times V \times V$, le Lagrangien est

$$\mathcal{L}(\Omega, v, q) = \int_\Gamma |v - u_0|^2 ds + \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla q\, dx - \int_\Omega f q\, dx - \int_{\Gamma_N} g q\, ds.$$

La formulation variationnelle de l'équation adjointe est par définition donnée par

$$\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}(\Omega, u, p), \phi \rangle = 0 \quad \forall\, \phi \in V,$$

ce qui nous donne

$$2 \int_\Gamma (u - u_0) \phi\, ds + \int_\Omega \nabla \phi \cdot \nabla p\, dx = 0 \quad \forall\, \phi \in V.$$

On en déduit l'équation pour l'état adjoint p :

$$\begin{cases} -\Delta p = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial p}{\partial n} = -2(u - u_0) & \text{sur } \Gamma, \\ \frac{\partial p}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_N, \\ p = 0 & \text{sur } \Gamma_D. \end{cases}$$

2. La dérivée de forme est
$$J'(\Omega)(\theta) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Omega}(\Omega, u, p)(\theta).$$
Comme seul Γ est variable, on obtient
$$J'(\Omega)(\theta) = \int_\Gamma (\nabla u \cdot \nabla p - fp)\, \theta \cdot n\, ds$$
$$+ \int_\Gamma \left(\frac{\partial |u - u_0|^2}{\partial n} + H|u - u_0|^2 \right) \theta \cdot n\, ds.$$
3. Si $u = u_0$ sur Γ, alors $p = 0$ et
$$\frac{\partial |u - u_0|^2}{\partial n} = 2(u - u_0) \frac{\partial (u - u_0)}{\partial n},$$
donc la dérivée de forme est nulle, $J'(\Omega)(\theta) = 0$. C'est logique puisque, dans ce cas $J(\Omega) = 0$ qui est la valeur minimum possible pour cette fonction objectif qui est toujours positive.