ECOLE POLYTECHNIQUE
Programme d'Approfondissement SISM
Conception optimale de structures (G. Allaire)
Examen écrit du 26 Mars 2008 (2 heures)

1 Optimisation paramétrique : 10 points

On considère une membrane élastique d'épaisseur variable, fixée sur son bord, qui au repos occupe un domaine plan Ω (un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^2$). On considère le mouvement vibratoire de cette membrane, c'est-à-dire que son déplacement vertical $u \in H_0^1(\Omega)$ est une fonction propre (non nulle), associée à une valeur propre $\lambda(h) \in \mathbb{R}$, solution de

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(h\nabla u) = \lambda(h)u & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

On s'intéresse au mode fondamental de la membrane, c'est-à-dire que $\lambda(h)$ est la plus petite valeur propre du problème (1) qui est aussi donnée par la formule

$$\lambda(h) = \min_{v \in H_0^1(\Omega), v\neq 0} \frac{\int_\Omega h\,|\nabla v|^2 dx}{\int_\Omega v^2 dx}. \tag{2}$$

On admettra que le minimum dans (2) est atteint et que (1) est l'équation d'Euler associée, qui admet une unique solution à une constante multiplicative près. La membrane est d'épaisseur $h(x)$ qui appartient à l'ensemble admissible

$$\mathcal{U}_{ad} = \{h \in L^\infty(\Omega)\ , \quad h_{max} \geq h(x) \geq h_{min} > 0 \text{ dans } \Omega\}\,.$$

On cherche à maximiser cette première fréquence propre de vibration. On considère donc la fonction objectif

$$\inf_{h\in\mathcal{U}_{ad}} \left\{ J(h) = -\lambda(h) + \ell \int_\Omega h(x)\,dx \right\},$$

où $\ell \geq 0$ est un multiplicateur de Lagrange fixé pour une contrainte sur l'aire de la membrane.

1. Démontrer que si $\ell = 0$ l'épaisseur optimale est une constante que l'on précisera. Quelle interprétation mécanique peut-on en donner ?
2. Soit le Lagrangien, défini pour $(h, \mu, v, q) \in \mathcal{U}_{ad} \times \mathbb{R} \times H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$,

   $$\mathcal{L}(h, \mu, v, q) = -\mu + \ell \int_\Omega h(x)\,dx + \int_\Omega (h\nabla v \cdot \nabla q - \mu v q)\,dx. \tag{3}$$

   Comment retrouve-t-on l'équation (1) à partir du Lagrangien ? Déduire aussi du Lagrangien l'équation pour l'état adjoint.

3. Calculer la dérivée par rapport à h de la fonction objectif $J(h)$. On se contentera d'un calcul formel en admettant que la solution de (1) est dérivable par rapport à h.
4. On définit un nouveau Lagrangien, plus simple, pour $(h, v) \in \mathcal{U}_{ad} \times H_0^1(\Omega)$,
$$\mathcal{M}(h, v) = -\frac{\int_\Omega h\,|\nabla v|^2 dx}{\int_\Omega v^2 dx} + \ell \int_\Omega h(x)\,dx.$$
Comment retrouver $J(h)$ à partir du Lagrangien $\mathcal{M}(h, v)$? Calculer la dérivée partielle de $\mathcal{M}(h, v)$ par rapport à h. Que retrouve-t-on ? Justifier ce calcul (on admettra encore que la solution de (1) est dérivable par rapport à h).
5. On suppose maintenant que $\ell > 0$, que Ω est un disque de rayon $R > 0$ et que l'épaisseur est une fonction radiale $h(r)$. On admettra que la solution de (1) est aussi radiale. Déduire de la condition d'optimalité qu'au voisinage de l'origine l'épaisseur optimale (si elle existe) est nécessairement égale à h_{min}.

2 Optimisation géométrique : 7 points

On considère à nouveau l'optimisation d'une membrane, d'épaisseur constante, représentée par un domaine plan Ω (un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^2$). Le bord de ce domaine est divisé en trois parties de mesures non nulles, $\partial\Omega = \Gamma \cup \Gamma_N \cup \Gamma_D$. Les bords Γ_D et Γ_N sont fixes et seul Γ peut varier. On introduit l'ensemble admissible des formes
$$\mathcal{U}_{ad} = \left\{\Omega \subset \mathbb{R}^2 \text{ tel que } (\Gamma_D \cup \Gamma_N) \subset \partial\Omega\right\}.$$
Le déplacement $u(x)$ de la membrane est la solution de
$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = f & \text{sur } \Gamma_N, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_D, \end{cases} \tag{4}$$
où $f \in L^2(\Gamma_N)$ est une force surfacique donnée. Soit $\sigma_0(x) \in L^2(\mathbb{R}^2)^2$ un vecteur de contraintes cible. On considère la fonction objectif
$$\inf_{\Omega \in \mathcal{U}_{ad}} \left\{ J(\Omega) = \int_\Omega |\nabla u - \sigma_0|^2 dx \right\},$$
où u est la solution de (4) et $|z|$ la norme euclidienne du vecteur $z \in \mathbb{R}^2$.

1. Donner le Lagrangien du problème et en déduire l'état adjoint.
2. Calculer(formellement) la dérivée de forme de la fonction objectif.
3. Quel résultat retrouve-t-on si $\sigma_0 \equiv 0$ dans $\mathbb{R}^2$? Préciser comment on peut tenir compte, numériquement, des contraintes imposées par $\mathcal{U}_{ad}$.

3 Homogénéisation : 3 points

On utilise les notations du chapitre 7 du cours. Soit deux matériaux conducteurs de conductivités isotropes $0 < \alpha < \beta$ que l'on mélange en proportions respectives $\theta > 0$ et $(1 - \theta) > 0$. On considère un laminé séquentiel de rang $1 \leq p \leq N$ dans des directions unités $(e_i)_{1 \leq i \leq p}$ orthogonales, de matrice α et d'inclusion β. On note A^* le tenseur de conductivité du matériau composite correspondant.

1. Montrer qu'il n'y a qu'un seul choix possible de p et des proportions de lamination $(m_i)_{1 \leq i \leq p}$ qui conduit à un tenseur A^* isotrope. Quelle conductivité homogénéisée extrême trouve-t-on ainsi ?
2. Même question en échangeant les rôles de α (l'inclusion) et β (la matrice).