ECOLE POLYTECHNIQUE
3ème année, MAP 567
Transport et diffusion (G. Allaire, F. Golse)
Corrigé de l'examen écrit du 14 Mars 2012

1. Transport et diffusion: 10 points

1) On trouve $u_0(x,\mu) = u_0(x)$ et $u_k(x,\mu) = \langle u_k\rangle(x) - \mu\partial_x u_{k-1}(x,\mu)$ pour $k \geq 1$. Ainsi $u_1(x,\mu) = C_1(x) - \mu u_0'(x)$ et $u_2(x,\mu) = C_2(x) - \mu C_1'(x) + \mu^2 u_0''(x)$ où C_1 et C_2 sont deux fonctions indeterminées de la seule variable x. Le problème de diffusion vérifié par u_0 est

$$\begin{cases} u_0''(x) = 0\,, \quad |x| < 1\,, \\ u_0(\pm 1) = U_\pm\,. \end{cases}$$

2) On obtient

$$\begin{cases} \mu\partial_x v_\epsilon + \dfrac{1}{\epsilon}(v_\epsilon - \langle v_\epsilon\rangle) = 0\,, & |x| < 1\,,\ |\mu| < 1\,, \\ v_\epsilon(-1,+\mu) = +\epsilon\mu U'\,, & 0 < \mu < 1\,, \\ v_\epsilon(+1,-\mu) = -\epsilon\mu U'\,, & 0 < \mu < 1\,, \end{cases}$$

3) En multipliant par v_ϵ chaque membre de l'équation vérifiée par v_ϵ, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon}\|v_\epsilon - \langle v_\epsilon\rangle\|^2_{L^2([-1,1]^2)} &= \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} \mu v_\epsilon(-1,\mu)^2 d\mu - \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} \mu v_\epsilon(1,\mu)^2 d\mu \\ &\leq \tfrac{1}{2}\int_0^1 \mu^3\epsilon^2 U'^2 d\mu - \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{0} \mu^3\epsilon^2 U'^2 d\mu = \tfrac{1}{4}\epsilon^2 U'^2\,. \end{aligned}$$

de sorte que $C_0 = \frac{1}{4}U'^2$.
4) On a

$$\partial_x v_\epsilon(x,\mu) = -\frac{S_\epsilon(x,\mu)}{\mu}$$

et donc

$$v_\epsilon(x,\mu) = \begin{cases} \epsilon\mu U' - \dfrac{1}{\mu}\displaystyle\int_{-1}^{x} S_\epsilon(y,\mu)dy & \text{si } \mu > 0 \\ -\epsilon\mu U' + \dfrac{1}{\mu}\displaystyle\int_{+1}^{x} S_\epsilon(y,\mu)dy & \text{si } \mu < 0 \end{cases}$$

On conclut par Cauchy-Schwarz.
5) En intégrant chaque membre de l'inégalité du 4) sur $[-1,1] \times ([-1,-\alpha] \cup [\alpha,1])$ on trouve

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1}\int_{\alpha\leq|\mu|\leq 1} v_\epsilon(x,\mu)^2 dxd\mu &\leq 2\int_{-1}^{1}\int_{\alpha\leq|\mu|\leq 1} \left(\epsilon^2\mu^2 U'^2 + \frac{2}{\alpha^2}\|S_\epsilon(\cdot,\mu)\|^2_{L^2(-1,1)}\right) dxd\mu \\ &\leq \frac{8}{3}\epsilon^2 U'^2 + \frac{8}{\alpha^2}\|S_\epsilon\|^2_{L^2([-1,1]^2)} = C_1\epsilon^2 U'^2 + \frac{C_2}{\alpha^2}C_0\epsilon \end{aligned}$$

avec $C_1 = \frac{8}{3}$ et $C_2 = 8$.

6) On a

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\alpha}^{\alpha} v_\epsilon(x,\mu)^2 dx d\mu \leq 2\int_{-1}^{1}\int_{-\alpha}^{\alpha} \left((v_\epsilon(x,\mu)-\langle v_\epsilon\rangle(x))^2+\langle v_\epsilon\rangle(x)^2\right) dx d\mu$$

$$\leq 2\|v_\epsilon-\langle v_\epsilon\rangle\|^2_{L^2([-1,1]^2)}+4\alpha\int_{-1}^{1}\langle v_\epsilon\rangle(x)^2 dx \leq 2C_0\epsilon^3+8\alpha\|v_\epsilon\|^2_{L^2([-1,1]^2)}$$

7) Donc

$$\|v_\epsilon\|^2_{L^2([-1,1]^2)} \leq C_1\epsilon^2 U'^2+\frac{C_2}{\alpha^2}C_0\epsilon+2C_0\epsilon^3+8\alpha\|v_\epsilon\|^2_{L^2([-1,1]^2)}$$

d'où, en choisissant $\alpha=\frac{1}{16}$

$$\|v_\epsilon\|^2_{L^2([-1,1]^2)} \leq 2\epsilon(C_1U'^2\epsilon+256C_2C_0+2C_0\epsilon^2) \leq 2\epsilon(512+\tfrac{8}{3}\epsilon+\tfrac{1}{2}\epsilon^2)U'^2$$

De sorte que

$$\|v_\epsilon\|_{L^2([-1,1]^2)} \leq 32|U'|\sqrt{\epsilon}(1+\tfrac{1}{192}\epsilon+\tfrac{1}{1024}\epsilon^2)^{1/2}\,,$$

et

$$\|u_\epsilon-U\|_{L^2([-1,1]^2)} \leq 32|U'|\sqrt{\epsilon}(1+\tfrac{1}{192}\epsilon+\tfrac{1}{1024}\epsilon^2)^{1/2}+\tfrac{2}{\sqrt{3}}\epsilon|U'|\,.$$

2. Schéma numérique: 10 points

1) On calcule l'erreur de troncature du schéma

$$E=\frac{u(t_{n+1},x_j)-u(t_n,x_j)}{\Delta t}-\frac{\nu}{(\Delta x)^2}\Big(\theta(\delta^2u)(t_{n+1},x_j)+(1-\theta)(\delta^2u)(t_n,x_j)\Big)$$

avec

$$(\delta^2u)(t_n,x_j)=u(t_n,x_{j-1})-2u(t_n,x_j)+u(t_n,x_{j+1}).$$

Un développement de Taylor conduit à

$$E=\frac{\partial u}{\partial t}(t_n,x_j)-\nu\theta\frac{\partial^2u}{\partial x^2}(t_{n+1},x_j)-\nu(1-\theta)\frac{\partial^2u}{\partial x^2}(t_n,x_j)+\mathcal{O}\left((\Delta t)+(\Delta x)^2\right)$$

$$=\frac{\partial u}{\partial t}(t_n,x_j)-\nu\frac{\partial^2u}{\partial x^2}(t_n,x_j)+\mathcal{O}\left((\Delta t)+(\Delta x)^2\right)$$

ce qui prouve la consistance et l'ordre 1 (au moins).

2) En notant $c=\nu\Delta t/(\Delta x)^2$, on réécrit le schéma sous la forme

$$u_j^{n+1}-c\theta(u_{j+1}^{n+1}-2u_j^{n+1}+u_{j-1}^{n+1})=u_j^n+c(1-\theta)(u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n).$$

Autrement dit, on a

$$AU^{n+1}=BU^n$$

avec les matrices

$$A=\begin{pmatrix} 1+2c\theta & -c\theta & 0 & \\ -c\theta & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & -c\theta \\ & 0 & -c\theta & 1+2c\theta \end{pmatrix}$$

et

$$B = \begin{pmatrix} 1-2c(1-\theta) & c(1-\theta) & 0 & \\ c(1-\theta) & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & c(1-\theta) \\ & 0 & c(1-\theta) & 1-2c(1-\theta) \end{pmatrix}$$

La matrice A est clairement une M-matrice stricte. Elle est donc inversible et on peut bien calculer U^{n+1} à chaque itération.

3) Sous la condition CFL $1 - 2c(1-\theta) \geq 0$, qui est équivalente à

$$\Delta t \leq \frac{(\Delta x)^2}{2\nu(1-\theta)},$$

on voit que B est une matrice positive (à coefficients positifs). Or, comme A est une M-matrice inversible, A^{-1} est strictement positive. Donc, par récurrence, si la donnée initiale U^0 est positive, alors U^n est positif pour tout n. De même, si $U^0 \leq M$ avec M un vecteur de composantes toutes égales à $M > 0$, alors $U^n \leq M$. Le schéma vérifie donc le principe du maximum discret, ce qui implique qu'il est stable pour la norme L^∞. Par application du théorème de Lax, un schéma stable et consistant est convergeant: donc le schéma converge en norme L^∞ sous la condition CFL ci-dessus.

4) En posant $U^* = \theta U^{n+1} + (1-\theta)U^n$, on vérifie que le schéma se réécrit sous la forme

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} + KU^* = 0$$

avec une matrice

$$K = \frac{\nu}{(\Delta x)^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \\ -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & -1 \\ & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

qui est clairement définie positive. Un calcul évident permet de vérifier que $2U^* = (U^{n+1} + U^n) + (2\theta - 1)(U^{n+1} - U^n)$.

5) En multipliant le schéma par $2U^*$ on obtient

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} \cdot \Big((U^{n+1} + U^n) + (2\theta - 1)(U^{n+1} - U^n) \Big) + 2KU^* \cdot U^* = 0,$$

ce qui conduit à

$$\frac{|U^{n+1}|^2 - |U^n|^2}{\Delta t} + (2\theta - 1)\frac{|U^{n+1} - U^n|^2}{\Delta t} + 2KU^* \cdot U^* = 0.$$

Comme K est positive et $1/2 \leq \theta \leq 1$, on en déduit que

$$|U^{n+1}|^2 \leq |U^n|^2,$$

c'est-à-dire que le schéma est stable en norme L^2 (sans condition sur le pas de temps).