**MASTER M2 MATHEMATIQUES DE LA MODÉLISATION**
**SORBONNE UNIVERSITE - ECOLE POLYTECHNIQUE**
**Cours de G. Allaire "systèmes hyperboliques de lois de conservation"**
**Examen écrit du 7 Janvier 2021 (3 heures)**

**Important:** La notation des copies prendra en compte la clarté et la précision de la rédaction. Le barême est donné à titre indicatif.

# 1 Problème de Riemann (4 points)

On considère l'équation hyperbolique scalaire en une dimension d'espace

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t u + \partial_x f(u) = 0, \\ u(0,x) = \left\{\begin{array}{ll} u_L & \text{si } x < 0 \\ u_R & \text{si } x > 0 \end{array}\right. . \end{array}\right. \tag{1}$$

Calculer explicitement l'unique solution entropique $u(t,x) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de (1) dans les cas suivants:

1. $f(u) = \exp(u)$, $u_L = -1$ et $u_R = +1$,
2. $f(u) = \exp(u^2)$, $u_L = +1$ et $u_R = -1$.

# 2 Système hyperbolique (16 points)

On considère le système suivant de deux lois de conservation en 1-d

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t u + \partial_x\Big((u^2+v^2)u\Big) = 0, \\ \partial_t v + \partial_x\Big((u^2+v^2)v\Big) = 0, \end{array}\right. \tag{2}$$

où $u(t,x)$ et $v(t,x)$ sont les inconnues à valeurs réelles. On note $\mathbf{w} = (u,v)$ le vecteur des inconnues et $f(\mathbf{w}) = (u^2+v^2)\mathbf{w}$ le flux de (2).

## 2.1 Hyperbolicité et entropie

1. Montrer que (2) est strictement hyperbolique sauf pour $\mathbf{w} = 0$. On donnera l'expression des valeurs propres $\lambda_1 < \lambda_2$ et des vecteurs propres associés $(r_1, r_2)$. Dans toute la suite on supposera que $\mathbf{w} \neq 0$.
2. Montrer que le 1-champ est LD (linéairement dégénéré) et le 2-champ VNL (vraiment non-linéaire).
3. Trouver un invariant de Riemann pour chaque champ.
4. Montrer que $S(\mathbf{w}) = u^2 + v^2$ est une entropie strictement convexe pour (2). On donnera l'expression du flux d'entropie $G(\mathbf{w})$.
5. Soit $R$ une matrice (constante) de rotation $2 \times 2$. On pose $\widetilde{\mathbf{w}} = R\mathbf{w}$. Montre que si $\mathbf{w}$ est solution entropique de (2) alors $\widetilde{\mathbf{w}}$ l'est aussi.

## 2.2 Problème de Riemann

On dira que $\mathbf{w}$ est une solution entropique de (2) si c'est une solution faible de (2) et si la condition d'entropie est satisfaite pour le seul couple $(S,G)$ de la question 2.1.4. On veut résoudre le problème de Riemann pour (2) avec la donnée initiale

$$\mathbf{w}(0,x) = \left\{\begin{array}{ll} \mathbf{w}_L & \text{si } x < 0, \\ \mathbf{w}_R & \text{si } x > 0. \end{array}\right. \tag{3}$$

1. Trouver l'ensemble des états $\mathbf{w}_*$ qu'on peut atteindre (à droite) à partir de $\mathbf{w}_L$ (à gauche) par une 1-discontinuité de contact.

2. Calculer explicitement la forme des 2-ondes de raréfaction.

3. Déterminer l'ensemble des états $\mathbf{w}_*$ qu'on peut relier (à gauche) à partir de $\mathbf{w}_R$ (à droite) par une 2-onde de raréfaction.

4. On considère un choc qui relie un état $\mathbf{w}_*$ (à gauche) à $\mathbf{w}_R$ (à droite) avec une vitesse $\sigma$ (tous les deux non nuls). Montrer que les conditions de Rankine-Hugoniot satisfaites par ce choc sont équivalentes à l'une ou l'autre des conditions
$$\begin{aligned} &(i) \quad u_R^2 + v_R^2 = u_*^2 + v_*^2 = \sigma, \\ &(ii) \quad v_* u_R = v_R u_* \text{ et } \sigma = \frac{(u_R^2 + v_R^2)u_R - (u_*^2 + v_*^2)u_*}{u_R - u_*}. \end{aligned} \tag{4}$$

5. Vérifier que la première relation de (4) correspond à une 1-discontinuité de contact. Dans ce cas, le choc (ou discontinuité de contact) est-il entropique ou pas ?

6. On veut maintenant sélectionner les 2-chocs entropiques qui relient un état $\mathbf{w}_*$ (à gauche) à $\mathbf{w}_R$ (à droite) avec une vitesse $\sigma$. Montrer que l'invariance par rotation de la question 2.1.5 permet de supposer que la deuxième composante de $\mathbf{w}_R$ est nulle, $v_R = 0$. Dans ce cas, que vaut $v_*$ et $\sigma$ ? Ecrire l'inégalité d'entropie pour ce 2-choc. En déduire que $|u_*| \geq |u_R|$. En réutilisant l'invariance par rotation montrer que cette condition d'admissibilté entropique est $|\mathbf{w}_*| \geq |\mathbf{w}_R|$ pour un état droit quelconque (la notation $|\mathbf{w}|$ désigne la norme euclidienne de $\mathbf{w}$ dans $\mathbb{R}^2$).

7. Dans le plan $(u, v)$ tracer la courbe d'onde pour le 1-champ passant par l'état gauche $\mathbf{w}_L$ et la courbe d'onde pour le 2-champ passant par l'état droit $\mathbf{w}_R$. Montrer que ces deux courbes se coupent en un unique point $\mathbf{w}_*$ que l'on précisera. En déduire la solution du problème de Riemann (on séparera les cas $|\mathbf{w}_L| < |\mathbf{w}_R|$, $|\mathbf{w}_L| = |\mathbf{w}_R|$ et $|\mathbf{w}_L| > |\mathbf{w}_R|$).

## 2.3 Schéma numérique

On considère le schéma numérique de Godunov pour le système (2)
$$\mathbf{w}_j^{n+1} = \mathbf{w}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\Big(g(\mathbf{w}_{j-1}^n, \mathbf{w}_j^n) - g(\mathbf{w}_j^n, \mathbf{w}_{j+1}^n)\Big),$$
avec le flux numérique $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ défini par
$$g(\mathbf{w}_L, \mathbf{w}_R) = f\Big(\mathbf{w}(0; \mathbf{w}_L, \mathbf{w}_R)\Big), \tag{5}$$
où $\mathbf{w}(x/t; \mathbf{w}_L, \mathbf{w}_R)$ est la solution du problème de Riemann pour le système (2) avec la donnée initiale (3).

1. Montrer que $g(\mathbf{w}_L, \mathbf{w}_R) = f(\mathbf{w}_L)$ et que le schéma de Godunov coincide avec le shéma décentré amont. Avait-on besoin de résoudre le problème de Riemann pour arriver à cette conclusion ?

2. En utilisant les propriétés de la solution du problème de Riemann, montrer que le schéma de Godunov vérifie les bornes uniformes suivantes, pour tout $n \geq 0$ et tout $j \in \mathbb{Z}$,
$$(u_j^n)^2 + (v_j^n)^2 \leq \max_j \left((u_j^0)^2 + (v_j^0)^2\right),$$
et, pour une donnée initiale strictement positive $u_j^0 > 0$, $v_j^0 > 0$,
$$u_j^n > 0 \text{ et } v_j^n > 0.$$

**MASTER M2 MATHEMATICS OF MODELING**
**SORBONNE UNIVERSITE - ECOLE POLYTECHNIQUE**
**Course of G. Allaire "hyperbolic systems of conservation laws"**
**Written exam, January 7, 2021 (3 hours)**

**Important:** The evaluation procedure will pay attention to the clarity and precision of the dissertation. The number of points, attributed to each part, is a tentative distribution.

# 1 Riemann problem (4 points)

Consider the hyperbolic scalar equation in one space dimension

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u + \partial_x f(u) = 0, \\ u(0,x) = \left\{ \begin{array}{ll} u_L & \text{si } x < 0 \\ u_R & \text{si } x > 0 \end{array} \right. . \end{array} \right. \tag{1}$$

Compute explicitly the unique entropy solution $u(t,x) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ of (1) in the following cases:

1. $f(u) = \exp(u)$, $u_L = -1$ and $u_R = +1$,
2. $f(u) = \exp(u^2)$, $u_L = +1$ and $u_R = -1$.

# 2 Hyperbolic system (16 points)

Consider the following system of two conservation laws in 1-d

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u + \partial_x \Big( (u^2 + v^2) u \Big) = 0, \\ \partial_t v + \partial_x \Big( (u^2 + v^2) v \Big) = 0, \end{array} \right. \tag{2}$$

where $u(t,x)$ and $v(t,x)$ are the real-valued unknowns. Denote by $\mathbf{w} = (u,v)$ the vector of unknowns and $f(\mathbf{w}) = (u^2 + v^2)\mathbf{w}$ the flux of (2).

## 2.1 Hyperbolicity and entropy

1. Show that (2) is strictly hyperbolic, except for $\mathbf{w} = 0$. Give the formulas for the eigenvalues $\lambda_1 < \lambda_2$ and associated eigenvectors $(r_1, r_2)$. In the sequel, it is always assumed that $\mathbf{w} \neq 0$.
2. Prove that the 1-field is LD (linearly degenerate) and the 2-field TNL (truly non-linear).
3. Find one Riemann invariant for each field.
4. Prove that $S(\mathbf{w}) = u^2 + v^2$ is a strictly convex entropy for (2). Give the formula of the entropy flux $G(\mathbf{w})$.
5. Let $R$ be a (constant) $2 \times 2$ rotation matrix. Define $\widetilde{\mathbf{w}} = R\mathbf{w}$. Prove that, if $\mathbf{w}$ is an entropy solution of (2) then $\widetilde{\mathbf{w}}$ is one too.

## 2.2 Riemann problem

A function $\mathbf{w}$ is called an entropy solution of (2) if it is a weak solution of (2) and if the entropy condition is satisfied for the sole $(S,G)$ couple of question 2.1.4. The goal is to solve the Riemann problem for (2) with the initial data

$$\mathbf{w}(0,x) = \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{w}_L & \text{if } x < 0, \\ \mathbf{w}_R & \text{if } x > 0. \end{array} \right. \tag{3}$$

1. Find the set of all states $\mathbf{w}_*$ which can be reached (to the right), starting from $\mathbf{w}_L$ (to the left), by a 1-contact discontinuity.

2. Compute explicitly the solution of a 2-rarefaction wave.

3. Find the set of states $\mathbf{w}_*$ which can be reached (to the left), starting from $\mathbf{w}_R$ (to the right), by a 2-rarefaction wave.

4. Consider a shock connecting the state $\mathbf{w}_*$ (to the left) with $\mathbf{w}_R$ (to the right) with speed $\sigma$ (both states are non-zero). Prove that the Rankine-Hugoniot conditions for this shock are equivalent to either one of the following conditions

$$\begin{aligned} &(i) \quad u_R^2 + v_R^2 = u_*^2 + v_*^2 = \sigma, \\ &(ii) \quad v_* u_R = v_R u_* \text{ and } \sigma = \frac{(u_R^2 + v_R^2)u_R - (u_*^2 + v_*^2)u_*}{u_R - u_*}. \end{aligned} \tag{4}$$

5. Check that the first line of (4) corresponds to a 1-contact discontinuity. In such a case, is this shock (or contact discontinuity) entropic or not ?

6. We now want to select the entropic 2-shocks connecting a state $\mathbf{w}_*$ (to the left) with $\mathbf{w}_R$ (to the right) with a speed $\sigma$. Show that the invariance by rotation of question 2.1.5 allows us to assume that the second component of $\mathbf{w}_R$ vanishes, $v_R = 0$. In such a case, what are the values of $v_*$ and $\sigma$ ? Write the entropy inequality for this 2-shock. Deduce from it that $|u_*| \geq |u_R|$. Using again the invariance by rotation, show that this entropy admissibility condition is $|\mathbf{w}_*| \geq |\mathbf{w}_R|$ for any right state (here $|\mathbf{w}|$ denotes the Euclidean norm of $\mathbf{w}$ in $\mathbb{R}^2$).

7. In the plane $(u, v)$ plot the wave curve for the 1-field, going through the left state $\mathbf{w}_L$, and the wave curve for the 2-field, going through the right state $\mathbf{w}_R$. Show that those two curves intersects at a unique point $\mathbf{w}_*$ which shall be made precise. Deduce from it the solution of the Riemann problem (discuss along the three cases $|\mathbf{w}_L| < |\mathbf{w}_R|$, $|\mathbf{w}_L| = |\mathbf{w}_R|$ and $|\mathbf{w}_L| > |\mathbf{w}_R|$).

## 2.3 Numerical scheme

Consider the Godunov numerical scheme for system (2)

$$\mathbf{w}_j^{n+1} = \mathbf{w}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\Big(g(\mathbf{w}_{j-1}^n, \mathbf{w}_j^n) - g(\mathbf{w}_j^n, \mathbf{w}_{j+1}^n)\Big),$$

with the numerical flux $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ defined by

$$g(\mathbf{w}_L, \mathbf{w}_R) = f\Big(\mathbf{w}(0; \mathbf{w}_L, \mathbf{w}_R)\Big), \tag{5}$$

where $\mathbf{w}(x/t; \mathbf{w}_L, \mathbf{w}_R)$ is the solution of the Riemann problem for system (2) with the initial data (3).

1. Prove that $g(\mathbf{w}_L, \mathbf{w}_R) = f(\mathbf{w}_L)$ and the Godunov scheme coincide with the upwind scheme. Was it necessary to solve the Riemann problem to reach this conclusion ?

2. By using the properties of the solution of the Riemann problem, prove that the Godunov scheme satisfies the following uniform bounds, for any $n \geq 0$ and $j \in \mathbb{Z}$,

$$(u_j^n)^2 + (v_j^n)^2 \leq \max_j \left((u_j^0)^2 + (v_j^0)^2\right),$$

and, for positive initial data $u_j^0 > 0$, $v_j^0 > 0$,

$$u_j^n > 0 \text{ and } v_j^n > 0.$$