Remarque I.2.2 :

Les fonctions $\left(w_k^\varepsilon,\ q_k^\varepsilon,\ \mu_k\right)$ qui vérifient les hypothèses (H1) à (H5) semblent, à première vue, assez mystérieuses... Dans les autres parties de cette thèse, nous verrons, au cours de la vérification de (H1) à (H5) dans divers cas, que les fonctions (μ_k) peuvent s'interpréter en terme de forces exercées sur les trous (cf., par exemple, proposition II.1.7), et que les fonctions $\left(w_k^\varepsilon,\ q_k^\varepsilon\right)$ sont en fait la vitesse et la pression d'une couche limite aux bords des trous $\left(T_i^\varepsilon\right)$. Pour plus de détails, on peut se reporter à la remarque II.1.12.

Remarque I.2.3 :

Les hypothèses (H1) à (H6) ont des conséquences immédiates sur les propriétés des trous T_i^ε. De (H2) et (H3) on tire à l'aide du théorème de Rellich que la suite (w_k^ε) converge fortement dans $[L^2(\Omega)]^N$ vers e_k quand ε tend vers zéro, tout en restant égale à zéro sur les trous T_i^ε. Par conséquent la mesure de Ω_ε dans $\mathbb{R}^N$ tend vers celle de Ω, c'est-à-dire que les trous sont de taille beaucoup plus petite que le milieu environnant (cas non classique d'homogénéisation).

Dans la suite de ce 1° paragraphe, nous allons démontrer des résultats qui découlent uniquement des hypothèses (H1) à (H6) et qui ne dépendent pas de la nature du problème de Stokes (I.1.2).

Proposition I.2.4 :

Soient $(w_k^\varepsilon,\ q_k^\varepsilon,\ \mu_k)$ des fonctions qui vérifient les hypothèses (H1) à (H5) pour $1 \leqslant k \leqslant N$.

Soit M la matrice définie par ces colonnes $(\mu_k)_{1 \leqslant k \leqslant N}$. On note $\left(\mu_k^i\right)_{1 \leqslant i,\, k \leqslant N}$ les coefficients de la matrice M, avec $\mu_k^i = \mu_k \cdot e_i$.
Alors pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ on a :

$$\left\langle \mu_k^i,\ \varphi \right\rangle_{\mathcal{D}',\, \mathcal{D}(\Omega)} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega \varphi\, \nabla w_k^\varepsilon . \nabla w_i^\varepsilon$$

Par conséquent les coefficients de M sont des mesures de Radon, et M est symétrique et positive au sens suivant :

D'autre part, on sait que $\left(q_k^\varepsilon\right)$ est une suite bornée de $L^2(\Omega)$, qui est P_i^ε-périodique et telle que :

$$\int_{P_i^\varepsilon} q_k^\varepsilon = 0$$

Classiquement (voir, par exemple, [SPA2] chap. 5 lemme 4.1) on sait alors que toute la suite $\left(q_k^\varepsilon\right)$ converge :

$$q_k^\varepsilon \longrightarrow 0 \quad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible.}$$

CQFD

Avant de vérifier les hypothèses (H4), (H5) et (H5)', on remarque que, d'après leur construction (cf. (II.3.2)), les fonctions $\left(q_k^\varepsilon,\ w_k^\varepsilon\right)_{1\leqslant k\leqslant N}$ sont telles que :

$$\nabla q_k^\varepsilon - \Delta w_k^\varepsilon \equiv 0 \quad \text{à l'intérieur des ouverts } \mathring{T}_i^\varepsilon,\ C_i^\varepsilon \text{ et } K_i^\varepsilon$$

Par conséquent :

$$\text{(II.3.27)} \quad \begin{cases} \nabla q_k^\varepsilon - \Delta w_k^\varepsilon = \mu_k^\varepsilon - \gamma_k^\varepsilon \text{ dans } \Omega \\ \text{où } \mu_k^\varepsilon \text{ est une mesure portée par les sphères } \partial C_i^\varepsilon \cap \partial K_i^\varepsilon \\ \text{et } \gamma_k^\varepsilon \text{ est une mesure portée par les sphères } \partial T_i^\varepsilon \end{cases}$$

Une intégration par parties élémentaire nous montre que :

$$\text{(II.3.28)} \quad \begin{cases} \mu_k^\varepsilon = \dfrac{\partial w_k^\varepsilon}{\partial n} - q_k^\varepsilon\, n \quad \text{sur } \partial C_i^\varepsilon \cap \partial K_i^\varepsilon \\[2ex] \gamma_k^\varepsilon = \dfrac{\partial w_k^\varepsilon}{\partial n} - q_k^\varepsilon\, n \quad \text{sur } \partial T_i^\varepsilon \end{cases}$$

où $n = e_r^i$ est le vecteur radial dans P_i^ε, et r_i est la coordonnée radiale dans P_i^ε.

On définit alors la mesure δ_i^ε comme étant la masse unité portée par la sphère $\partial C_i^\varepsilon \cap \partial K_i^\varepsilon$, et plus précisément :

$$\text{(II.3.29)} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad \left\langle \delta_i^\varepsilon,\ \varphi \right\rangle_{H^{-1},H_0^1(\Omega)} = \int_{\partial C_i^\varepsilon \cap \partial K_i^\varepsilon} \varphi(s)\, ds$$

D'autre part, on sait que $\left(q_k^\varepsilon\right)$ est une suite bornée de $L^2(\Omega)$, qui est P_i^ε-périodique et telle que :

$$\int_{P_i^\varepsilon} q_k^\varepsilon = 0$$

Classiquement (voir, par exemple, [SPA2] chap. 5 lemme 4.1) on sait alors que toute la suite $\left(q_k^\varepsilon\right)$ converge :

$$q_k^\varepsilon \longrightarrow 0 \quad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible.}$$

CQFD

Avant de vérifier les hypothèses (H4), (H5) et (H5)', on remarque que, d'après leur construction (cf. (II.3.2)), les fonctions $\left(q_k^\varepsilon,\ w_k^\varepsilon\right)_{1 \leqslant k \leqslant N}$ sont telles que :

$$\nabla q_k^\varepsilon - \Delta w_k^\varepsilon \equiv 0 \quad \text{à l'intérieur des ouverts } \mathring{T}_i^\varepsilon,\ C_i^\varepsilon \text{ et } K_i^\varepsilon$$

Par conséquent :

$$\text{(II.3.27)} \quad \begin{cases} \nabla q_k^\varepsilon - \Delta w_k^\varepsilon = \mu_k^\varepsilon - \gamma_k^\varepsilon \text{ dans } \Omega \\ \text{où } \mu_k^\varepsilon \text{ est une mesure portée par les sphères } \partial C_i^\varepsilon \cap \partial K_i^\varepsilon \\ \text{et } \gamma_k^\varepsilon \text{ est une mesure portée par les sphères } \partial T_i^\varepsilon \end{cases}$$

Une intégration par parties élémentaire nous montre que :

$$\text{(II.3.28)} \quad \begin{cases} \mu_k^\varepsilon = \dfrac{\partial w_k^\varepsilon}{\partial n} - q_k^\varepsilon\, n \quad \text{sur } \partial C_i^\varepsilon \cap \partial K_i^\varepsilon \\[2ex] \gamma_k^\varepsilon = \dfrac{\partial w_k^\varepsilon}{\partial n} - q_k^\varepsilon\, n \quad \text{sur } \partial T_i^\varepsilon \end{cases}$$

où $n = e_r^i$ est le vecteur radial dans P_i^ε, et r_i est la coordonnée radiale dans P_i^ε.

On définit alors la mesure δ_i^ε comme étant la masse unité portée par la sphère $\partial C_i^\varepsilon \cap \partial K_i^\varepsilon$, et plus précisément :

$$\text{(II.3.29)} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad \left\langle \delta_i^\varepsilon,\ \varphi \right\rangle_{H^{-1}, H_0^1(\Omega)} = \int_{\partial C_i^\varepsilon \cap \partial K_i^\varepsilon} \varphi(s)\, ds$$

$R_\varepsilon u = 0 \qquad\qquad$ on $\partial\Omega'_\varepsilon = \partial C_\varepsilon \, U\left\{\bigcup_i \partial Y^\varepsilon_{S_i}\right\}$

But it is crucial to check that $R_\varepsilon u \in \left[H^1_0\left(\Omega'_\varepsilon\right)\right]^N$. Because $R_\varepsilon u \in \left[H^1\left(Y^\varepsilon_{F_i}\right)\right]^N$ for each $i \in I(\varepsilon)$, it remains to show that $R_\varepsilon u$ is continous through the faces of Y^ε_i.

$$(III.12) \Longrightarrow R_\varepsilon u = Q_\varepsilon u + \frac{\varphi_K o \pi^\varepsilon_i}{\int_{\Sigma^\varepsilon_K} \varphi_K o \pi^\varepsilon_i} \left[\int_{\Sigma^\varepsilon_K} (u - Q_\varepsilon u)\cdot e_K\right] e_K \qquad \text{on } \Sigma^\varepsilon_K$$

By construction (see (I.2)) the functions φ_K are equals on the opposite faces of the same cell Y, and by definition $Q_\varepsilon u \in \left[H^1_0\left(\Omega'_\varepsilon\right)\right]^N$, then $R_\varepsilon u$ is continuous through Σ^ε_K and :

$$R_\varepsilon \in \mathcal{L}\left\{\left[H^1_0(C_\varepsilon)\right]^N \; ; \; \left[H^1_0\left(\Omega'_\varepsilon\right)\right]^N\right\}$$

$\boxed{\text{(ii)}}$ If $u \in \left[H^1_0\left(\Omega'_\varepsilon\right)\right]^N$, then lemma III.1 implies that:

$Q_\varepsilon \tilde{u} = u \qquad\qquad$ in Ω'_ε

Then from (III.11) we have:

$Q(uo\pi^\varepsilon_i) = uo\pi^\varepsilon_i \qquad\qquad$ in Y

In this case the system (III.4) has an obvious solution which is u, and the uniqueness of the solution implies that $R\left(uo\pi^\varepsilon_i\right) = uo\pi^\varepsilon_i$ in Y_F.

Thus: $\quad R_\varepsilon \tilde{u} = u \qquad\qquad$ in Ω'_ε

$\boxed{\text{(iii)}}$ If $\nabla.u = 0$ in C_ε, then from (III.12) we deduce that:

$\nabla.(R_\varepsilon u) = 0 \qquad\qquad$ in Ω'_ε

$\boxed{\text{(iv)}}$ Estimate of the norm of $R_\varepsilon u$:

Let $\psi \in H^1(Y)$.

The norm of $\psi o \pi^\varepsilon_i$ in $H^1\left(Y^\varepsilon_i\right)$ in terms of the norm of ψ in $H^1(Y)$ is given by :